Tentamen i Matematisk Statistik 5p

10 jan, 2001

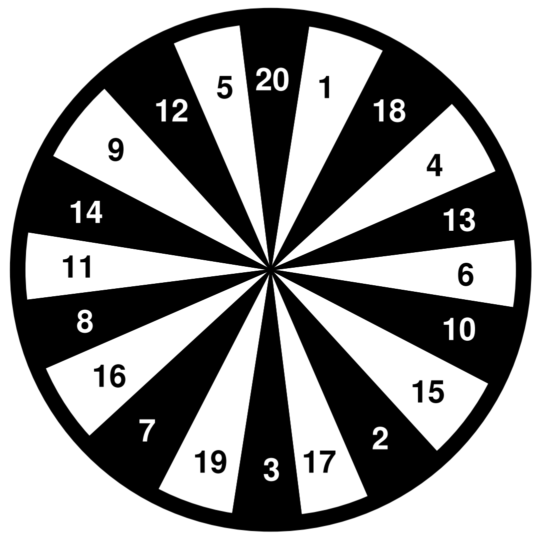
Poäng: 3p/uppg.
Betygsgränser: 12p: betyg G och 22p: VG
Hjälpmedel: Miniräknare samt tabell- och formelsamling som medföljer tentamenstexten.

Till uppgifterna skall FULLSTÄNDIGA LÖSNINGAR lämnas.
Lösningarna skall vara UTFÖRLIGT redovisade!

1. Antag att $X \in Exp(\lambda_1)$, att $Y \in Exp(\lambda_2)$ och att X och Y är oberoende. Visa att $\min(X, Y)$ är exponentialfördelad med parameter $\lambda_1 + \lambda_2$.

2. Definiera vad ett sannolikhetsmått är. Visa också att om händelserna A och B är oberoende så är A^C och B^C också oberoende. (Tips: Utnyttja att $A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$)

3. Petter Prick kastar pil på en tavla med nummer $1, 2, \ldots, 20$ (inga "dubblar", "tripplar" eller "bulls eye", se figur). Oavsett vad Petter siktar på sprider han pilarna över hela tavlan (och ibland utanför tavlan ...). Antag att $P(\text{Petter träffar nr } k) = 0.025$ där $k = 1, 2, \ldots, 20$ och att $P(\text{Petter missar tavlan}) = 0.5$ och att hans kast är oberoende av varandra. Vad är då den betingade sannolikheten att han, på 3 kast, får minst 58 poäng givet att han träffar tavlan med alla tre pilarna.



4. Antag att chansen att sjön Djupingen är frusen en dag i Januari är 60 %, chansen att fru Jansson har skridskor hemma är 70 % och chansen att någon av eller båda händelserna inträffar är 90 % (händelserna kan <u>inte</u> antas oberoende!). Vad är då sannolikheten att fru Jansson kan åka skridskor på Djupingen idag?

5. Låt

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}(\cos x + 1) & \text{då } -\pi \le x \le \pi \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

   a) Visa att $f(x)$ är en frekvensfunktion. (1p)

   b) Beräkna variansen för variabeln X som har denna frekvensfunktion. (2p)

6. En internetleverantör, "Fint som snus", garanterar nedladdningstider på 100 kb/sek. i genomsnitt. En konkurrerande leverantör, "Ont krut", betvivlar detta och observerar följande 6 nedladdningstider: $95, 93, 93, 111, 98, 89$ för "Fint som Snus" datorer. Kan "Ont krut", under lämpliga antaganden, visa att "Fint som snus" är långsamare än vad de hävdar.

7. Antag att $X \in \mathrm{N}(\mu, 0.3)$. Hur stort stickprov behövs för att konstruera ett 95 % konfidensintervall av längd 0.12 för $\mu = E(X)$?

8. I ett datorintensivt företag är man angelägen att spänningen (som kan antas vara normalfördelad) över vissa kretsar ej varierar för mycket. Man har observerat spänningsvärdena 0.41, 0.58, 0.57, 0.43 och 0.56 vid mätningar. Kan man då säga att spänningens varians är mindre än 0.1 med 99 % säkerhet?

9. Antag att $X \in \mathrm{N}(-1, \frac{1}{2})$ och att talen x_1 och x_2 är sådana att $P(x_1 \leq X \leq x_2) = 0.6$.

   a) Beräkna x_1 och x_2 som ligger symmetriskt över -1 (dvs $-x_2 - 1 = x_1 + 1$). (1p)

   b) Beräkna x_1 och x_2 sådana att sannolikheten att $\{x_1 \leq X \leq -1\}$ är hälften så stor som sannolikheten att $\{-1 \leq X \leq x_2\}$. (2p)

10. Antalet bilolyckor per år längs vägsträckan A kan anses vara Poisson-fördelat med parameter $\lambda = 3$. Längs en annan sträcka, B, är olycksantalet Poisson-fördelat med parameter 2 oberoende av antal olyckor längs A. Vad är sannolikheten att man under ett år

    a) får sammanlagt exakt 3 olyckor på sträckorna A och B varav minst en olycka på B? (1p)

    b) får sammanlagt minst 3 olyckor? (2p)
    (Tips: <u>om</u> $X \in \mathrm{Po}(\lambda_1)$ och $Y \in \mathrm{Po}(\lambda_2)$ <u>så</u> är $X + Y \in \mathrm{Po}(\lambda_1 + \lambda_2)$.)