Lösningar till tentamen i matematisk statistik 5p

10 jan, 2001

1. Låt $Z = \min(X, Y)$. Då är

$$
\begin{aligned}
F(z) &= P(Z \leq z) \\
&= P(\min(X, Y) \leq z) \\
&= 1 - P(\max(X, Y) > z) \\
&= 1 - P(X > z, Y > z) \\
&= 1 - P(X > z)P(Y > z) \quad \text{(ty } X \perp Y) \\
&= 1 - (1 - P(X \leq z))(1 - P(Y \leq z)) \\
&= 1 - (1 - (1 - e^{-\lambda_1 z}))(1 - (1 - e^{-\lambda_2 z})) \\
&= 1 - e^{-\lambda_1 z} e^{-\lambda_2 z} \\
&= 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) z}
\end{aligned}
$$

dvs $Z \in Exp(\lambda_1 + \lambda_2)$.

2. P är ett sannolikhetsmått om det för alla händelser A och B i utfallsrummet Ω gäller att
1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ närhelst $A \cap B = \emptyset$.

För att visa att A, B oberoende $\Rightarrow$ A^C, B^C oberoende räcker det att visa att V.L. = $P(A^C \cap B^C) = P(A^C)P(B^C) =$ H.L. (detta är ju definitionen av oberoende!). Antag att A och B är oberoende. Då är

$$
\begin{aligned}
\text{V.L.} &= P((A \cup B)^C) \quad \text{(enl. tipset)} \\
&= 1 - P(A \cup B) \\
&= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\
&= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \quad \text{(eftersom } A, B \text{ oberoende)}
\end{aligned}
$$

och

$$
\begin{aligned}
\text{H.L.} &= P(A^C)P(B^C) \\
&= (1 - P(A))(1 - P(B)) \\
&= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B)
\end{aligned}
$$

Alltså är V.L. = H.L. och därmed A^C och B^C oberoende enl. definitionen av oberoende.

3. De möjliga konfigurationerna Petter kan få för att poängsumman ska bli minst 58 poäng är

1 sätt $\quad 3 \cdot 20 = 60$	3 sätt $\quad 19 + 2 \cdot 20 = 59$	6 sätt $\quad 2 \cdot 19 + 20 = 18 + 2 \cdot 20 = 58$

Var och en av dessa inträffar med sannolikhet 0.025^3. Låt X_1, X_2, X_3 vara poängen Petter får med pil 1, 2 resp. 3.

$$
\begin{aligned}
&P(X_1 + X_2 + X_3 \geq 58 \,|\, \text{Petter träffar tavlan alla 3 ggr}) = \\
&= \frac{P(\{X_1 + X_2 + X_3 \geq 58\} \cap \{\text{Petter träffar tavlan alla 3 ggr}\})}{P(\text{Petter träffar tavlan alla 3 ggr})} \\
&= \frac{P(X_1 + X_2 + X_3 = 58) + P(X_1 + X_2 + X_3 = 59) + P(X_1 + X_2 + X_3 = 60)}{P(\text{1:a pilen träffar tavlan})P(\text{2:a pilen träffar tavlan})P(\text{3:a pilen träffar tavlan})} \\
&= \frac{1 \cdot 0.025^3 + 3 \cdot 0.025^3 + 6 \cdot 0.025^3}{(1 - 0.5)^3} \\
&= 10 \cdot 0.025^3 / 0.5^3 \\
&= \underline{0.00125}
\end{aligned}
$$

4. Låt A vara händelsen att Djupingen är frusen och B händelsen att fru Jansson har sina skridskor hemma. Eftersom $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (additionssatsen), så är $P(A \cup B) - P(A) - P(B) = -P(A \cap B)$ dvs $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ varmed

$$
\begin{aligned}
P(\{\text{sjön frusen}\} \cap \{\text{skridskor hemma}\}) &= P(A \cap B) \\
&= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\
&= 0.6 + 0.7 - 0.9 \\
&= \underline{0.4}
\end{aligned}
$$

5. a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\big[\sin x + x\big]_{-\pi}^{\pi} = 1$. Vidare är $\cos x \geq -1$ så $\cos x + 1 \geq 0$. Därmed är $f(x)$ en frekvensfunktion.

b) $E(X) = 0$ eftersom $f(x)$ symmetrisk över origo (som normalfördelningen) och $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx < \infty$. Vidare är

$$
\begin{aligned}
2\pi E(X^2) &= \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx \\
&\overset{\text{P.I.}}{=} \big[x^2 \sin x\big]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x\,dx + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&\overset{\text{P.I.}}{=} 0 - 2\left(\big[-x\cos x\big]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot (-\cos x)\,dx\right) + \frac{2\pi^3}{3} \\
&= 2(-\pi + \pi(-1) - 0) + 2\pi^3/3 \\
&= 2\pi\left(\frac{\pi^2}{3} - 2\right) \quad \text{varmed } \underline{V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{\pi^2}{3} - 2} \quad (\approx 1.29)
\end{aligned}
$$

6. Hypotes: $\begin{cases} H_0: \ \mu = 100 \\ H_1: \ \mu < 100 \end{cases}$

$$\bar{x} = 96.5 \qquad s = \sqrt{59.1} \quad \text{och därmed är} \quad u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = -1.11$$

Enligt CGS är $\bar{X}$ approximativt normalfördelad, så U är t-fördelad med $6-1 = 5$ frihetsgrader och med signifikansnivå $\alpha = 0.05$ är $t_{0.05}(5) = 2.02$ och $u = -1.11 \not< -2.02 = t_{0.05}(5)$ så H_0 kan ej förkastas på 5 % sign.nivå. Dvs "Ont krut" kan **ej** visa att "Fint som snus" är långsammare än 100 kb/sek.

7. $X \in \mathrm{N}(\mu, 0.3)$. Ett 95 % konf.intervall för μ är

$$\bar{X} \pm 1.96 \cdot \frac{0.3}{\sqrt{n}}$$

För att intervallet ska ha längd 0.1 måste

$$0.1 = 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{0.3}{\sqrt{n}}$$

varmed

$$n = \left(2 \cdot 1.96 \cdot \frac{0.3}{0.1}\right)^2 = 138.3$$

dvs man måste ha minst 139 observationer i stickprovet för konfidensgrad 95% och längd 0.1.

8. Är variansen mindre än 0.1 med 99 % säkerhet?

$\bar{x} = 0.51$ och $\sum x_i^2 = 1.3279$ så $s^2 = \frac{1}{4}\left(\sum x_i^2 - 5\bar{x}^2\right) = 0.00685$
och $\chi^2_{0.99}(5-1) = 0.30$ varmed ett 99 % konf.intervall är $(0, \frac{(5-1)0.00685}{0.30}) = (0, 0.091)$.
Eftersom variansen, σ^2, ligger på detta intervall med sannolikhet 0.99 så är svaret på frågan JA, variansen är mindre än 0.1 med 99 % säkerhet.

9. $X \in \mathrm{N}(-1, \frac{1}{2})$.

a) $0.6 = P(x_1 \le X \le x_2) = P\left(\frac{x_1-(-1)}{1/2} \le \frac{X-(-1)}{1/2} \le \frac{x_2-(-1)}{1/2}\right) = \Phi(2(x_2+1)) - \Phi(2(x_1+1)) = \{x_1 \text{ och } x_2 \text{ ligger symmetriskt över } -1\} = \Phi(2(x_2+1)) - (1 - \Phi(2(x_2+1))) = 2\Phi(2(x_2+1)) - 1$ så $\Phi(2(x_2+1)) = (0.6+1)/2 = 0.8$ dvs $2(x_2+1) = 0.84$ varmed $x_2 = 0.84/2 - 1 = -0.58$ och eftersom $x_1 + 1 = -x_2 - 1$ så är intervallet $(-1.42, -0.58)$.

b) $P(-1 \le X \le x_2) = 2P(x_1 \le X \le -1)$ dvs om $P(x_1 \le X \le -1) = p$ så måste $P(-1 \le X \le x_2) = 2p$ och eftersom $0.6 = P(x_1 \le X \le x_2) = P(x_1 \le X \le -1) + P(x_1 \le X \le -1) = p + 2p$ så måste $p = 0.2$.

x_1: $2p = 0.4 = P(-1 \le X \le x_2) = P(\frac{-1-(-1)}{1/2} \le \frac{X-(-1)}{1/2} \le \frac{x_2-(-1)}{1/2}) = \Phi(2(x_2+1)) - \Phi(0)$ så $\Phi(2(x_2+1)) = 0.9$ dvs $x_2 = 1.28/2 - 1 = -0.36$.

x_2: På samma sätt är $p = 0.2 = P(x_1 \le X \le -1) = P(\frac{x_1-(-1)}{1/2} \le \frac{X-(-1)}{1/2} \le \frac{-1-(-1)}{1/2}) = \Phi(0) - \Phi(2(x_1+1))$ så $\Phi(2(x_1+1)) = 0.3$ dvs $1 - 0.3 = 1 - \Phi(2(x_1+1)) = \Phi(-2(x_1+1))$ och $-2(x_1+1) = 0.52$ varmed slutligen $x_1 = 0.52/(-2) - 1 = -1.26$.

Alltså är intervallet $(-1.27, -0.36)$.

10. a) Låt

$$X = \{\text{antal olyckor på sträckan } A\} \quad \text{och} \quad Y = \{\text{antal olyckor på sträckan } B\}$$

Då är

$$\begin{aligned}
P(\{X+Y=3\} \cap \{Y \geq 1\}) &= P(\{X=2\} \cap \{Y=1\}) + P(\{X=1\} \cap \{Y=2\}) + \\
&\quad + P(\{X=0\} \cap \{Y=3\}) \\
&= e^{-3}\frac{3^2}{2!}e^{-2}\frac{2^1}{1!} + e^{-3}\frac{3^1}{1!}e^{-2}\frac{2^2}{2!} + e^{-3}\frac{3^0}{0!}e^{-2}\frac{2^3}{3!} \\
&= e^{-5}\left(\frac{9}{2}\cdot 2 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot \frac{8}{6}\right) \\
&= e^{-5}\frac{49}{3} \\
&\approx \underline{0.11}
\end{aligned}$$

b) Tipset: <u>om</u> $X \in \text{Po}(\lambda_1)$ och $Y \in \text{Po}(\lambda_2)$ <u>så</u> är $X+Y \in \text{Po}(\lambda_1+\lambda_2)$. I vårt fall är $\lambda_1 = 3$ och $\lambda_2 = 2$ varmed $X+Y \in \text{Po}(3+2) = \text{Po}(5)$ dvs

$$P(X+Y=z) = e^{-5}\frac{5^z}{z!}$$

Nu ville vi beräkna $P(X+Y \geq 3)$. Genom att använda tipset får vi

$$\begin{aligned}
P(X+Y \geq 3) &= 1 - P(X+Y < 3) \\
&= 1 - P(X+Y \leq 2) \\
&= 1 - \big(P(X+Y=0) + P(X+Y=1) + P(X+Y=2)\big) \\
&= 1 - \left(e^{-5}\frac{5^0}{0!} + e^{-5}\frac{5^1}{1!} + e^{-5}\frac{5^2}{2!}\right) \\
&= 1 - e^{-5}\left(1 + 5 + \frac{25}{2}\right) \\
&\approx \underline{0.875}
\end{aligned}$$

Vi hade för all del utan tipsets hjälp kunnat räkna ut detta på ett lite mer mödosamt sätt också:

$$\begin{aligned}
P(X+Y \geq 3) &= 1 - P(X+Y < 3) \\
&= 1 - \big(P(\{X=2\} \cap \{Y=0\}) + P(\{X=1\} \cap \{Y=1\}) + \\
&\quad + P(\{X=0\} \cap \{Y=2\}) + P(\{X=1\} \cap \{Y=0\}) + \\
&\quad + P(\{X=0\} \cap \{Y=1\}) + P(\{X=0\} \cap \{Y=0\})\big) \\
&= 1 - e^{-3}e^{-2}\left(\frac{3^2}{2!}\cdot\frac{2^0}{0!} + \frac{3^1}{1!}\cdot\frac{2^1}{1!} + \frac{3^0}{0!}\cdot\frac{2^2}{2!} + \frac{3^1}{1!}\cdot\frac{2^0}{0!} + \frac{3^0}{0!}\cdot\frac{2^1}{1!} + \frac{3^0}{0!}\cdot\frac{2^0}{0!}\right) \\
&= 1 - e^{-5}\left(\frac{9}{2}\cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot \frac{4}{2} + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1\right) \\
&\approx 0.875
\end{aligned}$$