Lösningar till tentamen i Matematisk Statistik, 5p

LGR98
20 juni, 2001 kl. 9.00 – 13.00

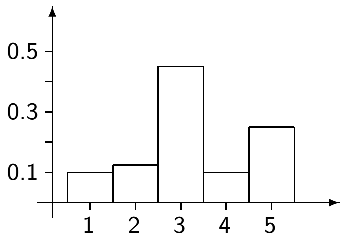
Kursansvarig: Eric Järpe
Maxpoäng: 30
Betygsgränser: 12p: G, 22p: VG

1. Efter en provräkning observerar en lärare resultaten

Betyg	1	2	3	4	5
Antal elever	2	3	11	2	6

Ange medianbetyg, typvärde samt rita histogram över de relativa frekvenserna. (2p)

Lösning: $m = \frac{3+3}{2} = \underline{3}$



$T = \underline{3}$ eftersom betyg 3 har flest obs.

2. En student funderar över vad medianresultatet för föregående skrivning var. Han får veta att av 8 som skrev hade den med näst minst poäng 9 och den med flest poäng 21. Vilken konfidensgrad har då intervallet (9, 21) för medianen? (3p)

Lösning: Konfidensgraden fås som

$$P(X_{(2)} \le m \le X_{(8)}) = 1 - \big(P(X_{(2)} > m) + P(X_{(8)} \le m)\big)$$

$$\begin{aligned} \text{där } P(X_{(2)} \le m) &= 1 - P(\text{högst 1 obs } \le m) \\ &= 1 - (0.5^8 + \tbinom{8}{1}0.5^7(1-0.5)) \\ &= 1 - 9 \cdot 0.5^8 \end{aligned}$$

så $P(X_{(2)} > m) = 9 \cdot 0.5^8 = 0.03516$

$$\begin{aligned} \text{och } P(X_{(8)} \le m) &= 1 - P(\text{exakt 0 obs } > m) \\ &= 0.5^8 \\ &= 0.0039 \end{aligned}$$

varmed intervallet $(X_{(2)}, X_{(8)})$ har konfidensgrad

$1 - 9 \cdot 0.5^8 - 0.5^8 = 0.96094\ldots$

dvs konfidensgrad <u>96.1%</u>

3. Antalet minuter som en man får vänta på bussen är exponetialfördelat med parameter 0.2. När han kommer till hållplatsen står där en annan man som säger att han väntat en minut. Hur stor är sannolikheten att summan av de båda väntetiderna är mer än 9 minuter? (2p)

Lösning: Låt X vara tiden som mannen får vänta. Då är $X \in Exp(0.2)$.
Den man som redan väntat 1 minut får totalt vänta $X + 1$ minuter.
Summan av tiderna blir $2X + 1$ och sannolikheten att denna är större än 9 är

$$\begin{aligned} P(2X+1>9) &= P(2X>8) \\ &= P(X>4) \\ &= 1-P(X\leq 4) \\ &= 1-(1-e^{-0.2\cdot 4}) \\ &= e^{-0.8} \\ &= \underline{0.45} \end{aligned}$$

4. En vaktmästare vid en skola har i sitt förråd en första hylla med 60 W glödlampor och en andra hylla med 40 W lampor. Vaktmästaren är bortrest i tre år och hans fina lampordning förbistras skändligen. Med beteckningen (E, i) för händelsen $\{$man tar en lampa med effekt E från hylla nr $i\}$ kan den nya oordningen sammanfattas:

$$P(60,1) = 0.4 \qquad P(40,1) = 0.05 \qquad P(60,2) = 0.25 \qquad P(40,2) = 0.3$$

a) Vad är den betingade sannolikheten att man tar en 60 W lampa och en 40 W givet att man tar dem från hylla nr 1? (2p)

b) Intet ont anande ska vaktmästaren hämta 2 st 60 W lampor och 1 st 40 W. Vad är sannolikheten att han hämtar rätt sorts lampor? (2p)

Lösning: a) $P(\text{en 60 W och en 40 W} \mid \text{tar från h. 1}) =$

$$= \frac{P(\{\text{en 60 W från h. 1}\} \cap \{\text{en 40 W från h. 1}\})}{P(\text{2 lampor från h. 1})}$$

$$= \frac{2 \cdot 0.4 \cdot 0.05}{(0.4 + 0.05)^2}$$

$$= \underline{0.1975}$$

b) Att vaktmästaren är "intet ont anande" innebär att han tar lamporna som om de stod rätt, dvs 2 lampor från hylla 1 och 1 lampa från hylla 2. Eftersom

$$P(\text{en 60 W} \mid \text{h. 1}) = \frac{P(\text{en 60 W från h. 1})}{P(\text{h. 1})} = \frac{0.4}{0.4 + 0.05} = 0.89$$

$$P(\text{en 40 W} \mid \text{h. 1}) = \frac{P(\text{en 40 W från h. 1})}{P(\text{h. 1})} = \frac{0.05}{0.45} = 0.11$$

$$P(\text{en 60 W} \mid \text{h. 2}) = \frac{P(\text{en 60 W från h. 2})}{P(\text{h. 2})} = \frac{0.25}{0.25 + 0.3} = 0.45$$

$$P(\text{en 40 W} \mid \text{h. 2}) = \frac{P(\text{en 40 W från h. 2})}{P(\text{h. 1})} = \frac{0.3}{0.55} = 0.55$$

varmed $P(\text{vaktmästaren tar rätt} \mid \text{han tar 2 från h. 1 och 1 från h. 2}) =$

$$\begin{aligned} &= \binom{2}{0} P(\text{en 60 W} \mid \text{h. 1})^2 P(\text{en 40 W} \mid \text{h. 2}) + \\ &\quad + \binom{2}{1} P(\text{en 60 W} \mid \text{h. 1}) P(\text{en 40 W} \mid \text{h. 1}) P(\text{en 60 W} \mid \text{h. 2}) \end{aligned}$$

$$= 1 \cdot 0.89^2 \cdot 0.55 + 2 \cdot 0.89 \cdot 0.11 \cdot 0.45$$

$$= \underline{0.52}$$

5. Arne och Bertil ska åka till fjällen. I bilen finns 1 förarsäte och 2 passagerarsäten där fram och 4 passagerarsäten där bak. Arnes pappa kör.

   (a) Alla 5 passagerarna (Arne och Bertil samt 3 föräldrar) sätter sig helt slumpmässigt. Vad är chansen att Arne och Bertil hamnar brevid varandra? (2p)

   (b) De 3 föräldrarna som är passagerare sätter sig helt slumpmässigt. Vad är chansen att Arne och Bertil kan sitta brevid varandra? (2p)

Lösning:

(a) Låt oss numrera passagerarsätena enligt

		1	2
3	4	5	6

Om man räknar utan hänsyn till ordningen är $\#\{(1,2),(3,4),(4,5),(5,6)\} = 4$.
För vart och ett av dessa 4 sätt kan de 3 föräldrarna sitta på $\binom{4}{3}$ sätt bland de 4 kvarvarande platsterna. Detta innebär att # gynnsamma $= 4 \cdot 4 = 16$ sätt.
Totalt kan de 5 sätta sig på $\binom{6}{3} \cdot \binom{4}{2} = 20 \cdot 6 = 120$ olika sätt.
Därmed är
P(A och B kan sitta brevid varandra om föräldrarna satt sig slumpmässigt) $=$
$= \frac{\#\text{ gynnsamma}}{\#\text{ möjliga}} = \frac{16}{120} = \frac{2}{15} = \boxed{0.13}$

(b) Eftersom föräldrarna satt sig helt slumpmässigt (dvs alla har lika stor sannolikhet att sitta varsomhelst) har vi med
gynnsamma = # möjliga − # ogynnsamma att
ogynnsamma $= \#\{(1,3,5),(1,4,5),(1,4,6),(2,3,5),(2,4,5),(2,4,6)\} = 6$.
möjliga $= \binom{6}{3} = 20$.
Därmed är
P(A och B kan sitta brevid varandra om föräldrarna satt sig slumpmässigt) $=$
$= \frac{20-6}{20} = \frac{7}{10} = \boxed{0.7}$

6. En lärare har en teori om att hans arbetsbörda (avseende den antal extratimmar han jobbar hemma) sedan en tid tillbaka fördubblats från år till år enligt följande:

Läsår	*Arbetstimmar*
98/99	35
99/00	68
00/01	95

Undersök om hans misstankar är obefogade genom att göra ett hypotestest på 5% signifikansnivå. (3p)

Lösning: Vi vill testa hypotesen

$$\begin{cases} H_0: & \text{arbetstiden fördubblas} \\ H_1: & \text{arbetstiden fördubblas ej} \end{cases}$$

Under nollhypotesen fördubblas arbetstimmarna för varje år, dvs om läraren under läsår 98/99 jobbar x timmar, så jobbar han $2x$ under 99/00, och $4x$ under 00/01. Totalt blir detta $7x$ timmar. Vi vet att det totala antalet timmar han jobbat under perioden är $35 + 68 + 95 = 198$ varmed $7x = 198$ dvs $x = 28.29$. Det förväntade antalet timmar under nollhypotesen från läsår till läsår blir därmed 28.29, $2x = 56.57$ och $4x = 113.14$ och vi har en tabell enl:

i	O_i	E_i
1	35	28.29
2	68	56.57
3	95	113.14

För att testa hypotesen ovan gör vi ett χ^2-test:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i=1}^{r} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \\ &= \frac{(35-28.29)^2}{28.29} + \frac{(68-56.57)^2}{56.57} + \frac{(95-113.14)^2}{113.14} \\ &= 1.592 + 2.309 + 2.908 \\ &= 6.809 \end{aligned}$$

Eftersom $\chi^2_{0.05}(r-1) = 5.99 < 6.809$ så blir svaret
<u>nej, hans tider fördubblas ej.</u>

7. Eleven Kalle vid Mossbyskolan funderar på att tävla i att springa 100 m vid *skololympiaden*, ett idrottsmästerskap för skolor över hela landet. Hans tider från tidigare lopp har varit (i sekunder):

11.2 12.0 11.9 11.7 11.4

a) Anta att tiderna är normalfördelade och gör ett test på 5% signifikansnivå av om väntevärdet är mindre än 12 sekunder. (3p)

b) Kalle tror själv att hans tider är $N(11.5, 0.3)$. Gymnastikläraren har med hjälp av tidigare sprinterresultat från olympiaden bedömt att vinnartiden är ungefär $N(11.1, 0.4)$. Vad är sannolikheten att Kalle vinner sprinterloppet vid olympiaden? (3p)

Lösning: a) Vi vill testa

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 12 \\ H_1 : \mu < 12 \end{cases} \text{ på signifikansnivå } \alpha = 0.05.$$

$$\bar{x} = \tfrac{58.2}{5} = 11.64$$

$$s^2 = \tfrac{1}{5-1}\left(\underbrace{\sum x_i^2}_{677.9} - 5 \cdot 11.64^2\right) = 0.113$$

$$U = \frac{\bar{x} - 12}{s/\sqrt{n}} = \frac{-0.36}{\sqrt{0.113}/\sqrt{5}} = -2.396$$

$$-t_\alpha(5-1) = -2.13 > -2.396$$

Ja, Kalles väntevärde är mindre än 12 sek.

b) Låt Kalles tid vara $X \in N(11.5, 0.3)$
och låt "vinnartiden" vara $Y \in N(11.1, 0.4)$.

Eftersom "vinnartiden" anger hur lång tid det tar för de medtävlande att springa, är sannolikheten att Kalle vinner
$P(X < Y) = P(X - Y < 0)$.

Vidare är $E(X - Y) = 11.5 - 11.1 = 0.4$,
$V(X - Y) = V(X) + V(Y) = 0.3^2 + 0.4^2 = 0.25$
och differensen $X - Y$ är normalfördelad eftersom X och Y är det,

så $P(\text{Kalle vinner}) = P(X < Y) = \Phi(\frac{0-0.4}{\sqrt{0.25}}) = 1 - \Phi(0.8) = \underline{0.212}$

8. Vid en undersökning av näringsvärdet i skolmaten gör man 5 observationer av vikten vitamin A i mikrogram per skolmåltid. Man gör normalfördelningsantagande och testar om den förväntade vitaminvikten, μ, är 200 mikrogram mot att den är 250 mikrogram på 5% signifikansnivå:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 200 \\ H_1 : \mu = 250 \end{cases}$$

Antag att standardavvikelsen är $\sigma = 40$. Vad blir styrkan av detta test? (3p)

Lösning: Styrka = $P($förkasta $H_0 | H_1$ sann$)$
Vad innebär det att "förkasta H_0" i denna uppgift?
Jo, att $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \lambda_\alpha$ dvs att $\frac{\bar{X}-200}{40/\sqrt{5}} > 1.64$.

Under H_1 är $\bar{X} \in N(250, 40/\sqrt{5})$ så styrkan är

$$\begin{aligned} P\left(\tfrac{\bar{X}-200}{40/\sqrt{5}} > 1.64 | H_1 \text{ sann}\right) &= 1 - P(\bar{X} \leq 1.64 \cdot 40/\sqrt{5} + 200 | \mu = 250) \\ &= 1 - P\left(\tfrac{\bar{X}-250}{40/\sqrt{5}} \leq \tfrac{40 \cdot 1.64 + (200-250)\sqrt{5}}{40}\right) \\ &= 1 - \Phi(-1.15) \\ &= \Phi(1.15) \\ &= \underline{0.8749} \end{aligned}$$

9. Antag att

- X_1 och X_2 är oberoende
- $E(X_1) = E(X_2) = \mu$
- $V(X_1) = V(X_2) = \sigma^2$.

Låt $A = 0.5X_1 + 0.5X_2$ och $B = 0.5(X_1 - X_2)^2$.

a) Visa att A är en väntevärdesriktig skattning av μ (1p)

b) Visa att B är en väntevärdesriktig skattning av σ^2 (2p)

Lösning: a)
$$\begin{aligned} E(A) &= E(0.5X_1 + 0.5X_2) \\ &= 0.5E(X_1) + 0.5E(X_2) \\ &= 0.5\mu + 0.5\mu \\ &= \mu \end{aligned}$$

Därmed är A väntevärdesriktig för μ.

b) $V(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2$.
Eftersom $V(X_1) = \sigma^2$ och $E(X_1)$ så är $\sigma^2 = E(X_1^2) - \mu^2$
varmed $E(X_1^2) = \sigma^2 + \mu^2$.
På samma sätt är även $E(X_2^2) = \sigma^2 + \mu^2$.

Därmed är

$$\begin{aligned} E(B) &= E(0.5(X_1 - X_2)^2) \\ &= 0.5E(X_1^2 - 2X_1X_2 + X_2^2) \\ &= 0.5\Big(E(X_1^2) - 2E(X_1)E(X_2) + E(X_2^2)\Big) \\ &= 0.5\Big((\sigma^2 + \mu^2) - 2\mu \cdot \mu + (\sigma^2 + \mu^2)\Big) \\ &= 0.5(2\sigma^2 + 2\mu^2 - 2\mu^2) \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

Därmed är B väntevärdesriktig för σ^2.