Lösningar till Tentamen i Matematisk Statistik, 5p

Distanskurs
29 oktober, 2004 kl. 13.30–17.30

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Miniräknare samt formelsamling som medföljer tentamenstexten. **Kursansvarig**: Eric Järpe (035-16 76 53, 070-306 95 89).

1. Antag att X är exponentialfördelad med parameter λ och att $Y = 2X$.
   Visa att Y är exponentialfördelad med parameter $\lambda/2$. (3p)

   Lösning:
   $X \in Exp(\lambda)$ innebär att $P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$.
   Därmed är Y's fördelningsfunktion

$$
\begin{aligned}
P(Y \leq y) &= P(2X \leq y) \\
&= P(X \leq y/2) \\
&= 1 - e^{-\lambda \cdot (y/2)} \\
&= 1 - e^{-(\lambda/2) \cdot y}
\end{aligned}
$$

   dvs $\underline{Y \in Exp(\lambda/2)}$.

2. Ange μ sådant att $P(X < 5) = 0.6$ om $X \in N(\mu, 0.2)$. (3p)

Lösning:

$$
\begin{aligned}
P(X < 5) &= 0.6 \\
P\Big(\frac{X-\mu}{0.2} < \frac{5-\mu}{0.2}\Big) &= 0.6 \\
\Phi\Big(\frac{5-\mu}{0.2}\Big) &= 0.6 \\
\Rightarrow \quad \frac{5-\mu}{0.2} &= 0.255 \\
\mu &= 5 - 0.2 \cdot 0.255 \quad = \quad \underline{4.949}
\end{aligned}
$$

3. Antag att X har frekvensfunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{27}\, x^2(x+1) & -1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Beräkna $E(1/X)$. (3p)

Lösning:

$f(x) = \frac{4}{27}x^2(x+1) \quad -1 \le x \le 2$

$$\begin{aligned} E\Big(\frac{1}{X}\Big) &= \int_{-1}^{2} \frac{1}{x} f(x)\, dx \\ &= \frac{4}{27} \int_{-1}^{2} x(x+1)\, dx \\ &= \frac{4}{27}\Big(\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{2} + \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_{-1}^{2}\Big) \\ &= \frac{4}{27}\Big(\frac{8}{3} - \Big(-\frac{1}{3}\Big) + \frac{4}{2} - \frac{1}{2}\Big) \\ &= \underline{2/3} \end{aligned}$$

4. Antalet jordskalv under ett år i ett område anses vara Poissonfördelat med parameter $\lambda = 0.1$, dvs om X_1 är "antalet jordskalv under ett år" och X_2 är "antalet jordskalv under ett annat år" är $X_1 \in Po(0.1)$, $X_2 \in Po(0.1)$ och X_1 oberoende av X_2. Dessutom gäller att om $X_1 \in Po(\lambda_1)$ och $X_2 \in Po(\lambda_2)$ så är $X_1 + X_2 \in Po(\lambda_1 + \lambda_2)$.

   a) Hur stor är risken för exakt 2 jordskalv under ett år? (1p)

   b) Hur stor är sannolikheten för ett jordskalvsfritt decennium? (2p)

   Lösning:

   a) $P(X = 2) = \dfrac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda} = \dfrac{0.1^2}{2} \cdot e^{-0.1} = \underline{0.0045}$

   b) Låt $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}$.

   Då är $Y \in Po(10 \cdot 0.1)$ varmed $P(Y = 0) \; = \; \dfrac{1^0}{0!} \cdot e^{-1} \; = \; \underline{0.368}$

5. Ange ett symmetriskt 90% konfidensintervall för väntevärdet μ med hjälp av observationerna 2, 3 och 7 då $X \in N(\mu, 3)$. (3p)

Lösning:

Ett symmetriskt konf.int. är $\bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\lambda_{0.05}$.

$\bar{x} = \frac{2+3+7}{3} = 4$
$\lambda_{0.05} = 1.6449$
$\sigma = 3$
$n = 3$

så ett symmetriskt 90% konf.int. är
$(4 - \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot 1.6449\ ,\ 4 + \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot 1.6449)$
dvs $(\underbrace{1.15}_{\text{avrundat nedåt}} \ ,\ \underbrace{6.85}_{\text{avrundat uppåt}})$

6. Ett elektronikföretag "Snabbt som blixten" köper komponenter av en underleverantör som garanterar att komponenterna i genomsnitt ska tåla strömmar på upp till 50 mA vid en viss spänning. Underleverantören lovar återbetalning om detta motbevisas. "Snabbt som blixten" mäter överbelastningsgränsen för 100 slumpvis utvalda komponenter: $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ och observerar att $\sum_{i=1}^{100} x_i = 4\,277$ och att $\sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 240\,427$. Har "Snabbt som blixten" rätt till återbetalning eller ej? Gör ett test på 1% signifikansnivå. (3p)

Lösning:

Hypotes: $\begin{cases} H_0 : \mu = 50 \\ H_1 : \mu < 50 \end{cases}$ och $\alpha = 0.01$

$\bar{x} = 42.77$
$s^2 = \frac{1}{99}(240\,427 - 100 \cdot 42.77^2) = 580.8$

$$u = \frac{42.77 - 50}{\sqrt{s^2}/\sqrt{100}} = \frac{-7.23}{24.1/10} = -3$$

Vi har att $t_\alpha(n-1) = t_{0.01}(99) < t_{0.01}(60) = 2.39$ (man kan också argumentera att $t_\alpha(n) \to \lambda_\alpha$ då $n \to \infty$, och $\lambda_\alpha = 2.3263$ i detta fall p.g.a. C.G.S. och eftersom 99 är så stort är detta en bra approximation). Därmed är

$$u = -3 < -2.39 = -t_{0.05}(60) < -t_{0.05}(99)$$

dvs "Snabbt som blixten" har rätt till återbetalning!

7. För att fördriva tiden medan hon uthärdar sitt celibat stickar Lysistrate en halsduk åt sin man. Varje dag stickar hon en normalfördelad längd med väntevärde 5 cm och standardavvikelse 0.5 cm. Varje natt river hon upp en normalfördelad längd med väntevärde 3 cm och standardavvikelse 1 cm. Hur stor är sannolikheten att halsduken är minst 1 m lång den morgon hon har uthärdat celibatet efter 2 månader, dvs efter 61 dygn? (Lämpliga oberoende-antaganden får göras.) (4p)

Lösning:

Låt X_i vara längden stickad under dag i
Y_i vara längden uppriven under natt i
Z vara halsdukens totala längd efter 61 dygn.

Då är $Z = \sum_{i=1}^{61} X_i - \sum_{i=1}^{61} Y_i$ normalfördelad och
$E(Z) = \sum E(X_i) - \sum E(Y_i) = 61 \cdot 5 - 61 \cdot 3 = 122$
$V(Z) = \sum V(X_i) + \sum V(Y_i) = 61 \cdot 0.5^2 + 61 \cdot 1^2 = 76.25$
(om $X_1, \ldots, X_{61}, Y_1, \ldots, Y_{61}$ är oberoende, vilket vi antar)

varmed

$$P(Z > 100) = 1 - \Phi\left(\frac{100 - 122}{\sqrt{76.25}}\right) = \underline{0.99413}$$

8. De tre små grisarna ska bygga ett hus och väljer mellan halmhus, trähus och tegelhus. Den betingade sannolikheten att den stora stygga vargen blåser ned huset är

0.08	givet att det är ett halmhus
0.05	givet att det är ett trähus
0.01	givet att det är ett tegelhus

Vidare är sannolikheten att grisarna bygger

ett halmhus	0.1
ett trähus	0.2
ett tegelhus	0.7

Antag nu att vargen en dag, efter att grisarna byggt sitt hus, kommer hem och har fångat grisarna. Vad skulle *isåfall* sannolikheten vara att de byggt ett tegelhus? (4p)

Lösning:

Låt följande beteckningar för händelser vara givna:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\text{grisarna bygger halmhus}\} \\ A_2 &= \{\text{grisarna bygger trähus}\} \\ A_3 &= \{\text{grisarna bygger tegelhus}\} \\ B &= \{\text{grisarna blir fångade}\} \end{aligned}$$

Då är

$$\begin{array}{ll} P(B|A_1) = 0.08 & P(A_1) = 0.1 \\ P(B|A_2) = 0.05 & P(A_2) = 0.2 \\ P(B|A_3) = 0.01 & P(A_3) = 0.7 \end{array}$$

och

$$\begin{aligned} P(A_3|B) &= \frac{P(A_3 \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B \cap A_3)}{P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)} \\ &= \frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)} \qquad \text{(Bayes' sats)} \\ &= \frac{0.01 \cdot 0.7}{0.08 \cdot 0.1 + 0.05 \cdot 0.2 + 0.01 \cdot 0.7} \\ &= \underline{0.28} \end{aligned}$$

9. Man vill göra n observationer av en stokastisk variabel med det okända väntevärdet μ och den kända standardavvikelsen 3. Man vill därefter pröva hypotesen att $H_0 : \mu = 0$ med ett enkelsidigt test av typen "förkasta H_0 om $\bar{x} > 1$". Hur liten signifikansnivå kan man ha om man gör 36 observationer? (4p)

Lösning:

Vi vet att $\sigma = 3$ och $n = 36$. Därmed är

$$\begin{aligned}
\text{sign.nivå} &= P(\text{förkasta } H_0 | H_0 \text{ sann}) \\
&= P(\bar{X} > 1 | \mu = 0) \\
&= P(\bar{X} > 1 | \bar{X} \in N(0, \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}})) \\
&= 1 - P(\bar{X} \leq 1 | \bar{X} \in N(0, \tfrac{3}{\sqrt{36}})) \\
&= 1 - \Phi\Big(\frac{1-0}{3/\sqrt{36}}\Big) \\
&= 1 - \Phi(2) \\
&= \underline{0.02275}
\end{aligned}$$