Lösningar till Tentamen i Matematisk Statistik, 7.5p

Distanskurs
5 juni, 2009 kl. 9.00–13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Miniräknare samt formelsamling som medföljer tentamenstexten. **Kursansvarig**: Eric Järpe (035-16 76 53, 0702-822 844).

1. Ett företag säljer klockor och antalet sålda klockor i december månad är

2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
211	198	212	209	199	197	209

Antag att försäljningssiffrorna är oberoende och lika fördelade och att standardavvikelsen för försäljningsantalen är 7.

(a) Beräkna stickprovsmedianen av försäljningsantalet under december månad. (3p)

(b) Gör ett test på 5% signifikansnivå av om man i genomsnitt säljer fler än 200 klockor i december. (3p)

(c) Vad blir styrkan av testet om hypoteserna är $\begin{cases} H_0: \mu = 200 \\ H_1: \mu = 205 \end{cases}$? (4p)

Lösning:

(a) Det ordnade stickprovet är: 197, 198, 199, 209, 209, 211, 212. Eftersom medianen är det mittersta värdet då antalet är udda får vi $m = 209$.

(b) $\bar{x} = \frac{1}{7}(197 + 198 + 199 + 209 + 209 + 211 + 212) = 205$
$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{205-200}{7/\sqrt{7}} = 1.8898 > 1.644854 = \lambda_{0.05}$.
Alltså förkastas $H_0 : \mu = 200$, dvs man kan hävda att man i genomsnitt säljer fler än 200 klockor under december månad på 5% signifikansnivå.

(c)

$$
\begin{aligned}
\text{Styrkan} &= P(H_0 \text{ förklastas} \,|\, H_1 \text{ sann}) \\
&= P\left(\tfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \lambda_\alpha \,|\, X \in N(\mu_1, \sigma^2)\right) \\
&= P\left(\tfrac{\bar{X}-200}{7/\sqrt{7}} > \lambda_{0.05} \,|\, X \in N(205, 49)\right) \\
&= P(\bar{X} > \lambda_{0.05}\sqrt{7} + 200 \,|\, \bar{X} \in N(205, 49/7)) \\
&= P\left(\tfrac{\bar{X}-205}{\sqrt{7}} > \tfrac{\lambda_{0.05}\sqrt{7}+200-205}{\sqrt{7}} \,|\, \bar{X} \in N(205, 7)\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\tfrac{1.644854\sqrt{7}-5}{\sqrt{7}}\right) \\
&= \Phi(0.24497) \\
&= 0.5965
\end{aligned}
$$

□

2. Den tankspridde vetenskapsmannen Ludwig har ingen koll på posten. Ett brev som kommer till honom försvinner innan han hinner läsa det med sannolikhet 50%. Antag att Ludwig missar att betala en räkning. Hur stor är risken att Ludwig även missar de 3 påminnelserna innan kravet går till inkasso? (3p)

   Lösning: $P(\text{Ludwig missar 3 påminnelser}) =$
   $= P(\text{missar första})P(\text{missar andra})P(\text{missar tredje}) = 0.5^3 = 0.125.$ □

3. Antag att $X \in N(0, \sigma^2)$. Bestäm σ^2 så att $P(|X| < 2) = 0.95$. (3p)

   Lösning: $X \in N(0, \sigma^2) \Rightarrow 0.95 = P(|X| < 2) = P(-2 < X < 2) =$
   $= P(X < 2) - P(X < -2) = \Phi(\frac{2-0}{\sigma}) - \Phi(\frac{-2-0}{\sigma}) = \Phi(\frac{2}{\sigma}) - (1 - \Phi(\frac{2}{\sigma})) = \Phi(\frac{2}{\sigma}) - 1 \Rightarrow$
   $\Rightarrow \frac{1}{2}(0.95 + 1) = \Phi(\frac{2}{\sigma}) \Rightarrow \frac{2}{\sigma} = 1.96 \Rightarrow \sigma^2 = (\frac{2}{1.96})^2 = 1.041233.$ □

4. Arne har en rektangulär tomt som är 20 m lång och 25 m bred. Han vill bygga en 40 cm hög mur runt tomten och funderar på att köpa ett parti om 100 stenar där varje stenblock är exakt 0.4 m högt och dess bredd i meter är exponentialfördelad med parameter $\lambda = 1$.

   (a) Vad är sannolikheten att ingen av de 100 stenarna är mindre än 1 cm bred? (3p)

   (b) Vad är *approximativt* sannolikheten att de 100 stenblocken räcker runt Arnes tomt? (4p)

   Lösning:

   (a) Låt X_i beteckna bredden av den $i$te stenen i meter. Då är $P(X_i \leq 0.01) = = 1 - e^{-1 \cdot 0.01}$ och vi får $P(\text{ingen sten} < 0.01m) = P(X_1 > 0.01, X_2 > 0.01, \ldots, X_{100} > 0.01) = \prod_{i=1}^{100} P(X_i > 0.01) = P(X_1 > 0.01)^{100} = (1 - P(X_1 \leq 0.01))^{100} = (1 - (1 - e^{-0.01}))^{100} = e^{-0.01 \cdot 100} = e^{-1} = 0.36788.$

   (b) För att stenarna ska räcka runt tomten måste summan av deras bredder, $\sum_{i=1}^{100} X_i$, överstiga tomtens omkrets, $2 \cdot 20 + 2 \cdot 25 = 90$ meter. Enligt CGS är $\sum_{i=1}^{100} X_i$ approximativt fördelad $N(\mu, \sigma^2)$ där $\mu = E(\sum_i X_i) = \sum_i E(X_i) = \sum_i 1 = 100$ och, om vi antar att bredderna är oberodende, $\sigma^2 = V(\sum_i X_i) = \sum_i V(X_i) = \sum_i 1 = 100$. Därmed är $P(\text{stenarna räcker runt Arnes tomt}) =$
   $= P(\sum_i X_i > 100) = 1 - \Phi(\frac{90-100}{10}) = 0.8413.$ □

5. En handelsresande är varje dag på en ny plats i landet och sannolikheten att han är i Skåne är 5%. Chansen att få kroppkakor till lunch, givet att man äter på en restaurang i Skåne, är 14% och chansen till kroppkakor, givet att man äter någon annanstans i Sverige, är 1%. Vad är den betingade sannolikehten att den handelsresande är i Skåne givet att han har kroppkakor på menyn? (3p)

   Lösning: Låt $S = \{\text{den handelsresande är i Skåne}\}$ och $K = \{\text{kroppkakor till lunch}\}$. Då är $P(K \mid S) = 0.14$, $P(K \mid S^C) = 0.01$, $P(S) = 0.05$ och därmed är $P(S \mid K) = = \frac{P(S\cap K)}{P(K)} = \frac{P(K \mid S)P(S)}{P(K \mid S)P(S)+P(K \mid S^C)P(S^C)} = \frac{0.14\cdot 0.05}{0.14\cdot 0.05+0.01\cdot 0.95} = \frac{0.007}{0.0165} = 0.424242.$ $\square$

6. Antalet fiskar som fiskaren Gäddvig drar upp under en dag är Poissonfördelat med parameter λ. Gäddvig märker att hon blir bättre och bättre för var dag som går (dvs λ ökar). Samtidigt blir det lättast för henne att fördela fångsten om hon fångat ett jämnt antal fiskar. Bevisa att sannolikheten att hon fångar ett jämnt antal fiskar är strängt avtagande med λ. (4p)

   (*Tips: Taylorutveckla $e^x + e^{-x}$.*)

   Lösning: Vi har att sannolikheten att Gäddvig får ett jämnt antal fiskar är $P(X = 2k; k = 0, 1, 2, \ldots) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = 2k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$.
   Taylorutvecklingen av e^x är $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ och av e^{-x} är $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$ så $e^x + e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+(-1)^k)x^k}{k!}$. Eftersom $1 - (-1)^k$ är 0 när k är udda och 2 när k är jämnt får vi att $e^x + e^{-x} = \sum_{k \text{ jämnt}} \frac{2x^k}{k!} = 2\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j}}{(2j)!}$. Därmed är $P(X = 2k; k = 0, 1, 2, \ldots) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = e^{-\lambda}\frac{1}{2}(e^{\lambda} + e^{-\lambda}) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2\lambda})$. Eftersom e^x är en strängt växande funktion gäller att $\frac{1}{2}(1 + e^{-2\lambda}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2e^{2\lambda}}$ är strängt avtagande med λ. $\square$