Lösningar till Tentamen i Matematisk Statistik, 7.5p

Distanskurs
16 januari, 2010 kl. 9.00–13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Miniräknare samt formelsamling som medföljer tentamenstexten. **Kursansvarig**: Eric Järpe (035-16 76 53, 0702-822 844).

1. Vilket värde har μ om $P(X < 2\mu) = 0.9$ där $X \in N(\mu, 3\mu)$ (dvs $V(X) = 3\mu$)? (3p)

   Lösning: $0.9 = P(X < 2\mu) = P(\frac{X-\mu}{\sqrt{3\mu}} < \frac{2\mu-\mu}{\sqrt{3\mu}}) = \Phi(\frac{\mu}{\sqrt{3\mu}}) = \Phi(\sqrt{\mu/3}) \Rightarrow \sqrt{3/\mu} = \Phi^{-1}(0.9) = 1.28 \Rightarrow \mu = 3 \cdot 1.28^2 = 4.9152.$ $\square$

2. Spökplumpen planerar en stöt i ett hus. Han försöker stjäla det han hinner från väggarna. I det rum han gör inbrottet finns 8 tavlor och 5 andra saker (speglar, klockor etc). Om det är mörkt är det lika stor chans att han tar vad som helst, men om ljuset är tänt väljer han bort 3 av tavlorna. Ljuset är tänt med sannolikhet 0.1.

   (a) Vad är $P(\text{Spökplumpen tar 3 tavlor och 2 andra saker} \mid \text{Ljuset är tänt})$? (3p)

   (b) Vad är $P(\text{Ljuset är tänt} \mid \text{Spökplumpen tar 3 tavlor och 2 andra saker})$? (4p)

   Lösning:

   (a) $P(\text{ Spökplumpen först tar 3 tavlor och sedan 2 andra saker } \mid \text{ Ljuset är tänt }) = = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5}{126} = 0.0396825.$ Totalt kan han dock ta 3 tavlor och 2 andra saker på $\binom{5}{3} = 10$ sätt varmed
   $P(\text{Spökplumpen tar 3 tavlor och 2 andra saker} \mid \text{Ljuset är tänt}) = 0.396825.$

   (b) $P(\text{ Ljuset är tänt} \mid \text{Spökplumpen tar 3 tavlor och 2 andra saker }) =$
   $= \frac{P(\text{ljust} \cap \text{3 tavlor} \cap \text{2 andra})}{P(\text{3 tavlor} \cap \text{2 andra})} = \frac{P(\text{3 tavlor} \cap \text{2 andra} \mid \text{ljust})P(\text{ljust})}{P(\text{3 tavlor} \cap \text{2 andra} \mid \text{ljust})P(\text{ljust}) + P(\text{3 tavlor} \cap \text{2 andra} \mid \text{mörkt})P(\text{mörkt})}$
   där $P\big(\text{3 tavlor} \cap \text{2 andra} \,\big|\, \text{ljust}\big) = \frac{25}{63}$ och $P\big(\text{3 tavlor} \cap \text{2 andra} \,\big|\, \text{mörkt}\big) = \binom{5}{3} \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{560}{1287}$. Alltså är $P(\text{Ljuset är tänt} \mid \text{Spökplumpen tar 3 tavlor och 2 andra saker}) = = \frac{\frac{25}{63} \cdot 0.1}{\frac{25}{63} \cdot 0.1 + \frac{560}{1287} \cdot 0.9} = 0.0920077.$ $\square$

3. Järnvägsbolaget JS (Jämt Snabbast) har insett att antalet resenärer mellan Halmstad och Göteborg är Poissonfördelat med parametern $\lambda = 2000e^{-0.012b}$ där b är biljettpriset i kronor.

   (a) Vad är sannolikheten att minst 10 personer åker med tåget om biljettpriset är 484:-/styck? (3p)

   (b) Bestäm det biljettpris som maximerar de förväntade intäkterna. (4p)

Lösning:

(a) Låt N vara antalet resenärer på tåget mellan Halmstad och Göteborg. Då är $N \in Poi(2000e^{-0.012\cdot 484}) = Poi(6) \Rightarrow P(N \geq 10) = 1 - P(N < 10) = = 1 - P(N \leq 9) = 1 - 0.916 = 0.084$ (enligt tabellen).

(b) Biljettintäkterna från en resa är Nb där N är antalet resande och b är biljettpriset, så de förväntade intäkterna är $E(Nb) = b\sum_{n=0}^{\infty} nP(N=n) = b\sum_{n=0}^{\infty} n\,\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = be^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty} n\,\frac{\lambda\cdot\lambda^{n-1}}{n(n-1)!} = be^{-\lambda}\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!} = b\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = b\lambda = 2000be^{-0.012b} = f(b)$.
f maximeras genom att lösa $f'(b) = 0$ m.a.p. b, dvs
$0 = f'(b) = 2000e^{-0.012b}(1 - 0.012b) \Leftrightarrow b = \frac{1}{0.012} = 83{:}33$.
(Att detta verkligen är ett max kan man förvissa sig om med ett teckenstudium.)
Alltså är det biljettpris som maximerar intäkterna 83:33 kronor. □

4. Vid en marknadsundersökning finner reklambyrån *Schyssta bananer* att antalet nöjda kunder fördelar sig enligt

2003	2004	2005	2006	2007	2008
57	47	53	58	29	20

(a) Kan man på 5% signifikansnivå säga att man har fler än 50 nöjda kunder under högkonjunktur (dvs åren 2003, 2004, 2005 och 2006)? (3p)

(b) Gör ett test på 1% signifikansnivå av om man kan dementera att det under högkonjunktur är dubbelt så många nöjda kunder som under lågkonkunktur.(3p)

Lösning:

(a) $\begin{cases} H_0 : \mu = 50 \\ H_1 : \mu > 50 \end{cases}$

$\bar{x} = \frac{1}{4}(57 + 47 + 53 + 58) = 53.75$

$s^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2) = \frac{1}{3}(57^2 + 47^2 + 53^2 + 58^2 - 4\cdot 53.75^2) = 24.91667$

$\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{53.75-50}{\sqrt{24.91667}/2} = 1.5025 < 2.35 = t_{0.05}(3)$.

Alltså kan man ej visa att man har fler än 50 nöjda kunder på 5% signifikansnivå.

(b) Totalt är antalet nöjda kunder $57 + 47 + 53 + 58 + 29 + 20 = 264$. För att det ska vara “dubbelt så många under åren 2003, 2004, 2005, 2006 som under 2007, 2008” får vi ekvationen $264 = 2x + 2x + 2x + 2x + x + x = 10x \Rightarrow x = 26.4$ varmed vi har klasstabellen:

i	1	2	3	4	5	6
O_i	57	47	53	58	29	20
E_i	52.8	52.8	52.8	52.8	26.4	26.4

$\sum_{i=1}^{k}\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i} = 0.334 + 0.637 + 0.001 + 0.512 + 0.256 + 1.551 = 3.291 < 15.0863 = \chi^2_{0.01}(5)$.

Nej, man kan inte dementera att finns dubbelt så många nöjda kunder under högkonjunktur som under lågkonjunktur på 1% signifikansnivå. □

5. Antag att $X \in U(0,1)$.

(a) Visa att $E(\ln X) = -1$ och $V(\ln X) = 1$. (3p)

Låt m vara det geometriska medelvärdet av X, dvs $m = (\prod_{i=1}^{n} X_i)^{1/n}$ där $X_1, X_2, \ldots, X_n$ är ett stickprov på X.

(b) Bestäm $a, b \in \mathbb{R}$ så att $a((\ln m) - b)$ blir asymptotiskt standard normalfördelad. (4p)

Lösning:

(a) $X \in U(0,1) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & \text{då } x \in (0,1) \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

$E(\ln X) = \int_{\mathbb{R}} \ln x\, f(x)\, dx = \int_0^1 \ln x \cdot 1\, dx \overset{P.I.}{=} [x \ln x]_0^1 - \int_0^1 x \frac{1}{x}\, dx = 0 - 0 - [x]_0^1 = -1.$
$V(\ln X) = E((\ln X)^2) - E(\ln X)^2$. $E((\ln X)^2) = \int_{\mathbb{R}} (\ln x)^2 f(x)\, dx = \int_0^1 (\ln x)^2 dx \overset{P.I.}{=} [x(\ln x)^2]_0^1 - \int_0^1 x 2 \frac{1}{x} \ln x\, dx = 0 - 0 - 2\int_0^1 \ln x\, dx = -2 \cdot (-1) = 2 \Rightarrow V(\ln X) = 2 - (-1)^2 = 1.$

(b) Eftersom $\ln m = \ln(\prod_{i=1}^{n} X_i)^{1/n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln X_i$ så är $\ln m$ asymptotiskt normalfördelad enligt CGS (centrala gränsvärdessatsen) med parametrarna $\mu = E(\ln m)$ och $\sigma^2 = V(\ln m)$. Dessa är $E(\ln m) = E(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln X_i) = = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(\ln X_i) = -1$ och $V(\ln m) = V(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(\ln X_i) = \frac{1}{n}$ (eftersom $X_1, X_2, \ldots, X_n$ är oberoende per definition av stickprov). Om vi nu låter $a = \sqrt{n}$ och $b = -1$ får vi $a(\ln m - b) = \sqrt{n}\,(\ln m + 1)$ där $E(a(\ln m - b)) = \sqrt{n}\,(E(\ln m) + 1) = 0$ och $V(a(\ln m - b)) = n\, V(\ln m) = 1$.
Detta, tillsammans med att $\ln m$ är asymptotiskt normalfördelad, innebär att

$$\sqrt{n}\,(\ln m + 1) \overset{\text{asymp.}}{\in} N(0,1)$$

□