Lösningar till tentamen i Introduktionskurs i Matematik, 7.5 hp

Distanskurs
8 januari, 2011, kl. 9.00–13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe (035-16 76 53, 0702-822 844).

1. Bevisa att mängden $\mathbb{R}$ är överuppräknelig. (3p)

   Lösning: (Se beviset av Sats 4.3, s. 48–49 i *Diskret matematik* av Bergström.) □

2. Bevisa att om $a > 1$ och $b > 0$ så $a^x/x^b \to \infty$ då $x \to \infty$. (3p)

   Lösning: (Se beviset av Sats 8, s. 57 i *Analys i en variabel* av Persson och Böiers.) □

3. Avgör om utsagan

$$(\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge R) \vee (Q \vee R) \quad \Rightarrow \quad \neg P \vee Q$$

   är en tautologi, kontradiktion eller ingetdera. (3p)

   Lösning: Sanningsvärdestabell:

P	Q	R	$(((\neg P \wedge \neg Q)$	$\vee$	$(\neg P \wedge R))$	$\vee$	$(Q \vee R))$	$\Rightarrow$	$\neg P \vee Q$
S	S	S	F	F	F	S	S	$\boldsymbol{S}$	S
F	S	S	F	S	S	S	S	$\boldsymbol{S}$	S
S	F	S	F	F	F	S	S	$\boldsymbol{F}$	F
F	F	S	S	S	S	S	S	$\boldsymbol{S}$	S
S	S	F	F	F	F	S	S	$\boldsymbol{S}$	S
F	S	F	F	F	F	S	S	$\boldsymbol{S}$	S
S	F	F	F	F	F	F	F	$\boldsymbol{S}$	F
F	F	F	S	S	F	S	F	$\boldsymbol{S}$	S

   Eftersom utsagan är sann för vissa värden på P, Q och R och falsk för andra, så är den kontingent. □

4. Bevisa att $11^{2n+1} \equiv 2^{n+2} \pmod{7}$. (3p)

Lösning: $11^{2n+1} - 2^{n+2} = (11^2)^n \cdot 11 - 2^n \cdot 2^2 = 121^n \cdot 11 - 2^n \cdot 4 \equiv (121 - 7 \cdot 17)^n \cdot 11 - 2^n \cdot 4 = (121 - 119)^n \cdot 11 - 2^n \cdot 4 = 2^n \cdot 11 - 2^n \cdot 4 = 2^n(11-4) = 2^n \cdot 7 \equiv 0 \pmod{7}$. □

5. Ekvationen $z^4 - z^3 - 2z^2 + 6z = 4$ har roten $z = 1 + i$. Bestäm samtliga rötter. (3p)

Lösning: $z = 1+i$ rot $\Rightarrow$ även $\bar{z} = 1 - i$ är rot $\Rightarrow$ kan bryta ut $(z-(1+i))(z-(1-i)) = z^2 - 2z + 2$. Faktoriseringen blir $z^4 - z^3 - 2z^2 + 6z - 4 = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + z - 2) = 0$ varmed de återstående 2 rötterna fås av att lösa $z^2 + z - 2 = 0$ vilket ger $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$. Alltså är samtliga rötter $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = 1$, $z_4 = -2$. □

6. Lös fullständigt rekurrensekvationen $r_{n+2} - 4r_n = 2^n$ där $r_0 = 0$ och $r_3 = 5$. (4p)

Lösning:

Hom. $\lambda^2 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2 \;\Rightarrow\; r_{hn} = A \cdot 2^n + B \cdot (-2)^n$.

Part. Ansätter $r_{pn} = z_n 2^n \;\Rightarrow\; r_{n+2} - 4r_n = z_{n+2}2^{n+2} - 4z_n 2^n = 4 \cdot 2^n(z_{n+2} - z_n) = 2^n \;\Rightarrow\; z_{n+2} - z_n = \frac{1}{4}$. Ansätter $z_n = An + B \;\Rightarrow\; z_{n+2} - z_n = A(n+2) + B - (An + B) = 2A = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; A = \frac{1}{8} \;\Rightarrow\; z_n = \frac{n}{8}$ (kan välja $B = 0$) $\Rightarrow\; r_{pn} = z_n 2^n = \frac{n}{8}2^n$

Fullst. $r_n = r_{hn} + r_{pn} = A \cdot 2^n + B \cdot (-2)^n + \frac{n}{8}2^n$. Begynnelsevillkoren $r_0 = 0$ och $r_3 = 5$ ger nu $0 = r_0 = A + B \;\Rightarrow\; A = -B$ och $5 = r_3 = 8A - 8B + 3 \;\Rightarrow\; A - B = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; A = \frac{1}{8}, B = -\frac{1}{8} \;\Rightarrow\; r_n = \frac{1}{8} \cdot 2^n - \frac{1}{8} \cdot (-2)^n + \frac{n}{8} \cdot 2^n = \frac{1}{8}(2^n(1+n) - (-2)^n) = 2^{-3}2^n(1 + n - (-1)^n) = \begin{cases} n2^{n-3} & \text{om } n \text{ jämnt} \\ (2+n)2^{n-3} & \text{om } n \text{ udda} \end{cases}$

□

7. Bevisa att för alla heltal $n \geq 1$ så är

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^k} \quad \leq \quad \frac{3}{2}$$

(4p)

Lösning: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^k} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \sum_{k=0}^{n} (\frac{1}{2})^k - \frac{1}{2^0} - \frac{1}{2^1} = \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = 2(1 - \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n) - \frac{1}{2} = 2 - (\frac{1}{2})^n - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - (\frac{1}{2})^n \leq \frac{3}{2}$ för alla $n \geq 1$. □

8. Bevisa att om p är ett primtal och $p|ab$ så $p|a$ eller $p|b$. (3p)

Lösning: Antingen måste $p|a$ eller $p\not|a$. Om $p|a$ är det klart att "$p|a$ eller $p|b$". Antag istället att $p\not|a$. Eftersom p är ett primtal och $p\not|a$ gäller i så fall att a och p är relativt prima, dvs att $\mathrm{SGD}(a,p)=1$. Enligt en sats (Sats 3.18) om lösning av diofantiska ekvationer finns det då heltal x och y sådana att $ax+py=1$. Multiplikation med b i båda led ger nu att $abx+bpy=b$. Men eftersom $p|ab$ och $p|bpy$ så måste $p|(abx+bpy)$, dvs $p|b$. $\square$

9. Beräkna summan

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+4k+3}$$

(4p)

Lösning: Låt oss först betrakta ekvationen $k^2+4k+3=0$. Denna ekvation har lösningarna $k_1=-1$ och $k_3=-3$. Därmed kan vänsterledet skrivas $(k+1)(k+3)$ och därför $\frac{1}{k^2+4k+3}$ partialbråksuppdelas $\frac{A}{k+1}+\frac{B}{k+3}=\frac{A(k+3)+B(k+1)}{(k+1)(k+3)}=\frac{1}{(k+1)(k+3)}$. Eftersom täljarna ska vara lika för alla k måste $A+B=0$ och $3A+B=1$, dvs $A=\frac{1}{2}$ och $B=-\frac{1}{2}$. Därmed är $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+4k+3}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3})=\frac{1}{2}((\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{6})+\ldots+(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}))$. Detta är en sk *teleskopsumma* där nästan alla termer tar ut varandra rekursivt. Kvar blir bara $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n-1+3}-\frac{1}{n+3})=\frac{5(n^2+5n+6)-6(2n+5)}{12(n^2+5n+6)}=\frac{n(5n+13)}{12(n+2)(n+3)}$. $\square$