Lösningar till Tentamen i Matematisk Statistik, 7.5 hp

Distanskurs
30 april, 2011 kl. 9.00–13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Miniräknare samt formelsamling som medföljer tentamenstexten. **Kursansvarig**: Eric Järpe (035-16 76 53, 0702-822 844).

1. Antag att $X \in Exp(\lambda_X)$, att $Y \in Exp(\lambda_Y)$ och att X och Y är oberoende av varandra. Bevisa att $\min(X, Y) \in Exp(\lambda_X + \lambda_Y)$. (3p)

   Lösning: Låt oss beteckna $\min(X, Y)$ med Z. Då är fördelningsfunktionen för Z

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(\min(X,Y) \le z) \\
&= P(\{X \le z\} \cup \{Y \le z\}) \\
&= 1 - P(X > z, Y > z) \\
&= 1 - (1 - P(X \le z))(1 - P(Y \le z)) \\
&= 1 - (1 - (1 - e^{-\lambda_X z}))(1 - (1 - e^{-\lambda_Y z})) \\
&= 1 - e^{-\lambda_X z} e^{-\lambda_Y z} \\
&= 1 - e^{-(\lambda_X + \lambda_Y) z}
\end{aligned}
$$

   vilket känns igen som fördelningsfunktion för en variabel som är exponentialfördelad med $\lambda_X + \lambda_Y$. $\square$

2. Beräkna a om $P(X > a) = 0.99$ där $X \in N(0.99, 0.99)$, dvs X är normalfördelad med väntervärde $=$ varians $= 0.99$. (3p)

   Lösning: $X \in N(0.99, 0.99) \Rightarrow 0.99 = P(X > a) = 1 - P(X \le a) = 1 - \Phi(\frac{a-0.99}{\sqrt{0.99}}) =$
   $= \Phi(-\frac{a-0.99}{\sqrt{0.99}}) \Rightarrow -\frac{a-0.99}{\sqrt{0.99}} = 2.34 \Rightarrow a = -2.34 \cdot \sqrt{0.99} + 0.99 = -1.3383.$ $\square$

3. Låt

$$
f(x) = \begin{cases} Cxe^{-3x^2} & \text{om } x > 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}
$$

   (a) Bestäm C så att $f(x)$ är en frekvensfunktion för en slumpvariabel. (3p)

   (b) Beräkna medianen för en slumpvariabel som har $f(x)$ som frekvensfunktion. (3p)

   Lösning:

   (a) Med substitutionen $u = e^{-3x^2}$ är $du = -6xe^{-3x^2}dx$ dvs $(-\frac{1}{6})du = xe^{-3x^2}dx$ varmed $\int Cxe^{-3x^2}dx = C\int(-\frac{1}{6})du = -\frac{C}{6}u = -\frac{C}{6}xe^{-3x^2}$ vilket ger att $1 = \int_0^\infty Cx^{-3x^2}dx = -\frac{C}{6}[e^{-3x^2}]_0^\infty = -\frac{C}{6}(0-1) = \frac{C}{6}$ varmed slutligen $C = 6$.

(b) Medianen är det tal m sådant att $P(X < m) = P(X > m)$. Denna ekvation kan skrivas

$$\int_0^m Cxe^{-3x^2}dx = \int_m^\infty Cxe^{-3x^2}dx$$

och eftersom C är en positiv konstant kan den strykas ur båda led varmed ekvationen förenklas till $\int_0^m xe^{-3x^2}dx = \int_m^\infty xe^{-3x^2}dx$. (Detta är intressant då det innenbär att denna uppgift kan lösas oberoende av hur/om man beräkna C i deluppgift (a).) Vänster led blir $\int_0^m xe^{-3x^2}dx = -\frac{1}{6}[e^{-3x^2}]_0^m = \frac{1}{6}(1 - e^{-3m^2})$ och höger led $\int_m^\infty xe^{-3x^2}dx = -\frac{1}{6}[e^{-3x^2}]_m^\infty = \frac{1}{6}(e^{-3m^2} - 0)$. Därmed kan ekvationen skrivas $1 = 2e^{-3m^2} \Rightarrow -3m^2 = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \Rightarrow m = \sqrt{\frac{\ln 2}{3}} \approx 0.4807$. □

4. Gatumusikanten Berit spelar gitarr på Brogatan kl. 11.00–17.00 en dag. Antag att varje förbipasserande, i Berits framlagda mössa, lägger ett antal kronor som är Poissonfördelat med $\lambda = 3$. Hur stor chans är det då

   (a) exakt att Berit tjänar minst 5 kr under 5 minuter om det då går förbi 2 personer? (3p)

   (b) approximativt att Berit tjänar minst 1000 kr under hela dagen om det då går förbi 345 personer? (3p)

Lösning:

(a) Låt oss anta att antalet mynt som de olika förbipasserande lägger i mössan är oberoende från person till person och låt X_i vara antalet kronor som förbipasserande nr i lägger i Berits mössa. Då tjänar Berit $X_1 + X_2$ (då det går förbi 2 personer). Eftersom $X_1 + X_2 \in Poi(3 + 3)$ får vi att $P(\text{Berit tjänar minst 5 kronor}) = P(X_1 + X_2 \geq 5) = 1 - P(X_1 + X_2 \leq 4) = 1 - 0.285 = 0.715$ (enl. tabell i formelsamlingen)Alternativt hade man givetvis kunnat beräkna $P(X_1 + X_2 \leq 4)$ som $P(X_1+X_2 = 0)+P(X_1+X_2 = 1)+P(X_1+X_2 = 2)+P(X_1+X_2 = 3)+P(X_1+X_2 = 4) = e^{-6}\frac{6^0}{0!} + e^{-6}\frac{6^1}{1!} + e^{-6}\frac{6^2}{2!} + e^{-6}\frac{6^3}{3!} + e^{-6}\frac{6^4}{4!} = e^{-6}(1 + 6 + 18 + 36 + 54) = 0.285056..$

(b) Vill beräkna $P(X_1 + X_2 + \ldots + X_{345} \geq 1000)$. Om n är stort så är approximativt $\sum_{i=1}^n X_i \in N(\mu, \sigma^2)$ enligt centrala gränsvärdessatsen, där $\mu = E(\sum_{i=1}^n X_i)$ och $\sigma^2 = V(\sum_{i=1}^n X_i)$. I detta fall är $E(\sum_{i=1}^{345} X_i) = 345 \cdot 3 = 1035$ och $V(\sum_{i=1}^n X_i) = 1035$ varmed $P(X_1 + X_2 + \ldots + X_{345} \geq 1000) = 1 - \Phi(\frac{1000-1035}{\sqrt{1035}}) = \Phi(1.09) = 0.8621$. □

5. Urmakaren Urban beställer ett parti om 10 likadana klockor med återköpsgarantin "Om klockorna i genomsnitt drar sig mer än 5 sekunder/dygn så får köparen nya klockor eller pengarna åter". Urban tar tiden och ser att de klockor han beställt drar sig

$$7 \quad 6 \quad 4 \quad 7 \quad 6 \quad 4 \quad 5 \quad 7 \quad 6 \quad 5$$

sekunder under ett dygn.

(a) Betyder det att han borde skicka tillbaka klockorna? Gör ett test på 5% signifikansnivå. (4p)

(b) Gör ett 99% konfidensintervall för variansen av klockavvikelsen under ett dygn. (3p)

Lösning:

(a) $\sum_i x_i = 57$ och $\sum_i x_i^2 = 337$ varmed $\bar{x} = 5.7$ och $s^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2) = \frac{1}{9}(337 - 10 \cdot 5.7^2) = 1.3444$. Därmed testar vi hypotesen $\begin{cases} H_0 : \mu = 5 \\ H_1 : \mu > 5 \end{cases}$ genom att beräkna teststatistikan $u = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{5.7-5}{\sqrt{1.3444/10}} = 1.909$ och jämföra den med percentilen $t_{0.05}(10-1) = 1.8331$. Eftersom $1.909 > 1.8331$ förkastas H_0, dvs man har visat att klockorna drar sig mer än 5 sekunder på 5% signifikansnivå, dvs ja, Urban ska skicka tillbaks dem!

(b) Ett konfidensintervall för variansen med konfidensgrad $1-\alpha$ är $(0,\ (m-1)s^2/\chi_{1-\alpha}(m-1))$. Högergränsen av intervallet blir i detta fall $\frac{(10-1)\cdot 1.3444}{2.0879} = 5.7953$ så det 99% konfidensintervallet blir $(0,\ 5.796)$ (observera att högergränsen ska avrundas uppåt. $\square$

6. Agda brukar varje år sälja exklusiva julböcker. Av försäljningssiffrorna från tidigare år vet hon att efterfrågan fördelar sig enligt

Antal efterfrågade böcker	0	1	2	3	4
Sannolikhet	0.05	0.1	0.3	0.35	0.2

Agda beställer böckerna för 250:-/st och säljer dem för 495:-/st. Vidare kostar det henne 75:-/st då hon ska göra sig av med de böcker som hon ej lyckats sälja. Hur många böcker ska Agda beställa för att maximera sin förväntade vinst? (5p)

Lösning: Antag att Agda beställer K böcker och att S böcker är efterfrågade. Om nu $K \leq S$ så blir vinsten $= 495K - 250K = 245K$. Om istället $K > S$ så blir vinsten $= 495S - 250K - (K-S)75 = 570S - 325K$. Därmed är den förväntade vinsten i de olika fallen då Agda beställer 0, 1, 2, 3 respektive 4 böcker:

$E(\text{vinst} \,|\, K=0) = 495 \cdot 0 - 250 \cdot 0 = 0.$

$E(\text{vinst} \,|\, K=1) = (570 \cdot 0 - 325 \cdot 1)P(S=0) + 245 \cdot 1P(S \geq 1) = -325 \cdot 0.05 + 245 \cdot 0.95 = 216.5.$

$E(\text{vinst} \,|\, K=2) = (570 \cdot 0 - 325 \cdot 2)P(S=0) + (570 \cdot 1 - 325 \cdot 2)P(S=1) + 245 \cdot 2P(S \geq 2) = 376.$

$E(\text{vinst} \,|\, K=3) = (570 \cdot 0 - 325 \cdot 3)P(S=0) + (570 \cdot 1 - 325 \cdot 3)P(S=1) + (570 \cdot 2 - 325 \cdot 3)P(S=2) + 245 \cdot 2P(S \geq 3) = 364.75.$

$E(\text{vinst} \,|\, K=4) = (570 \cdot 0 - 325 \cdot 4)P(S=0) + (570 \cdot 1 - 325 \cdot 4)P(S=1) + (570 \cdot 2 - 325 \cdot 4)P(S=2) + (570 \cdot 2 - 325 \cdot 4)P(S=3) + 245 \cdot 2P(S=4) = 153.5.$

Alltså blir den förväntade vinsten maximal (376:-) om Agda beställer 2 böcker. $\square$