2.21 a) $P(A \text{ till } B \text{ via } C) = P(E_2 \cap E_3) =$

$= P(E_2)P(E_3 | E_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$

b) $P(A \text{ till } B) = P(E_1 \cup (E_2 \cap E_3)) =$

$= P(E_1) + P(E_2 \cap E_3) - P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) =$

$= \frac{2}{5} + \frac{8}{15} - P(E_1 | E_2 \cap E_3)P(E_2 \cap E_3)$

$= \frac{14}{15} - \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{15} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

c) Sannolikheten att man kan ta sig fram direkt A till B är $P(E_1) = \frac{2}{5}$ och chancen att man kan ta sig fram via C är $P(E_2 \cap E_3) = \frac{8}{15}$. Eftersom $\frac{2}{5} = \frac{6}{15} < \frac{8}{15}$ är chansen därmed störst om man tar vägen via C.

Ex 3.3

Från Ex 2.19 (s. 61) [Tillverkar serier om 6 enheter]

$X = \#\{\text{felaktiga enheter av } 6\}$

$p(x) = P(X = x)$ är dess frekv.fkn.

I Ex 2.19 räknade vi ut att

P(exakt 2 fel) =

$$= \binom{6}{2} 0.1^{2} \cdot (1-0.1)^{6-2} = \ldots = 0.098$$

Detta motsvarar då $P(X=2) = p(2)$.

Vi kan också få

$$p(3) = \binom{6}{3} 0.1^{3} \cdot (1-0.1)^{6-3}$$

och

$$p(4) = \binom{6}{4} 0.1^{4} \cdot (1-0.1)^{6-4}$$

osv. Allmänt får vi för

$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ att

$$p(x) = \binom{6}{x} 0.1^{x} \cdot (1-0.1)^{6-x}$$

Detta är frekv.fkn för en binomialfördeln.

Ex I Ex 3.3 räknade vi ut sannolikhetsfunktion för $X = \#\{\text{felaktiga enheter av } 6\}$

$$p(x) = \binom{6}{x} 0.1^{x} \cdot (1-0.1)^{6-x} \qquad x = 0, 1, \ldots, 6$$

Med hjälp av denna kan vi räkna ut fördelningsfunktionen F för X:

$$F(0) = P(X \le 0) = P(X = 0) = p(0) =$$
$$= 1 \cdot 0.1^{0}(1-0.1)^{6-0} = 0.9^{6} \approx 0.53$$

$$F(1) = P(X=0) + P(X=1) = F(0) + p(1) =$$
$$= 0.9^{6} + 6 \cdot 0.1^{1}(1-0.1)^{6-1} = 0.9^{6} + 6 \cdot 0.1 \cdot 0.9^{5} \approx 0.88$$

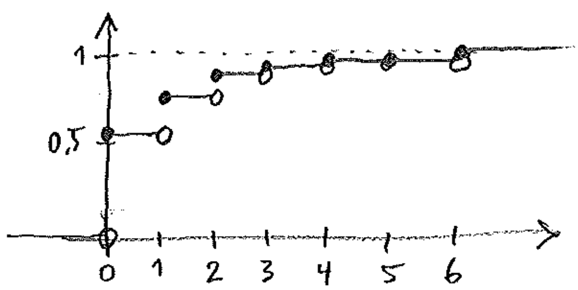
$$F(2) = P(X \le 2) = P(X \le 1) + P(X = 2) =$$
$$= F(1) + p(2) = F(1) + \frac{{}^{3}\cancel{6}\cdot 5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}} \cdot 0.1^{2}(1-0.1)^{6-2}$$
$$= F(1) + 15 \cdot 0.01 \cdot 0.9^{4} \approx 0.98$$

$$F(3) = \ldots$$

$$F(4) = \ldots$$

$$F(5) = P(X \le 5) = P(\{\underbrace{X > 5}_{=\{X=6\}}\}^{c}) = 1 - P(X=6) =$$
$$= 1 - 1 \cdot 0.1^{6}(1-0.1)^{6-6} = 1 - 0.1^{6} \approx$$

$$F(6) = P(X \le 6) = 1 - P(X > 6) = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$



Fördelningsfunktionen

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.53\ldots & 0 \le x < 1 \\ 0.88\ldots & 1 \le x < 2 \\ 0.98\ldots & 2 \le x < 3 \\ \vdots & \\ 0.999999 & 5 \le x < 6 \\ 1 & x \ge 6 \end{cases}$$

3.9 $P(A) = 0.3$

X = antal lyckade försök

$X \in Bin(10, 0.3)$

a) $P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) +$

$+ P(X=2) + P(X=3)$

$= \binom{10}{0} 0.3^0 \underbrace{(1-0.3)^{10-0}}_{0.0282} + \binom{10}{1} 0.3^1 \underbrace{0.7^9}_{0.04035} +$

$+ \binom{10}{2} 0.3^2 \underbrace{0.7^8}_{0.0576} + \binom{10}{3} 0.3^3 \underbrace{0.7^7}_{0.08235}$

$= 1 \cdot 0.0282 + 10 \cdot 0.0121 +$

$+ \underbrace{\frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1}}_{45} \cdot 0.005184 + \underbrace{\frac{10 \cdot \cancel{9}^{3} \cdot \cancel{8}^{4}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}}_{120} \cdot 0.00222$

$= 0.0282 + 0.121 + \underbrace{45 \cdot 0.0052}_{0.23328} + \underbrace{120 \cdot 0.0022}_{0.2664}$

$= 0.649$

b) $P(X = 3) = 0.266$

c) $P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$

$= 1 - 0.0282 - 0.121$

$= 0.851$

$\frac{10 \cdot \cancel{9}^{3} \cdot \cancel{8} \cdot 7}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 210$

$\frac{{}^{2}\cancel{10} \cdot \cancel{9}^{3} \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot 6}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}$ 36 · 7 = 252

d) $P(X \geq 10-4) = P(X \geq 6) =$

$1 - P(X \leq 5) = 1 - (0.649 + \overbrace{\underbrace{\binom{10}{4}}_{210} \underbrace{0.3^4}_{0.008} \underbrace{0.7^6}_{0.1176}}^{0.2} +$

0.103 $+ \underbrace{\binom{10}{5}}_{252} \underbrace{0.3^5}_{0.00243} \underbrace{0.7^5}_{0.168} = 1 - 0.303 = 0.697$

$\boxed{\text{Uppg } 3.22}$

$P(\text{någon av de 120 olika} > 11) =$

$= 1 - P(\text{ingen av de 120 olika} > 11)$

$= 1 - P(\text{alla 120 olika} \leq 11)$

$= 1 - P(X_1 \leq 11)P(X_2 \leq 11) \cdots P(X_{120} \leq 11)$

$= 1 - P(X \leq 11)^{120}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{där } X \in Po(4) \Rightarrow P(X \leq 11) = 0.999 \\ (0.9991 \text{ enl. boken}) \end{array} \right\}$

$= 1 - 0.999^{120} = \underline{\underline{0.113}}$

$(1 - 0.9991^{120} = 0.102$ om man räknat med tabellvärdet från boken.)

Däremot är binomialfördelningstabellen i boken FEL!

3.26 $P(\text{olycka}) = 0.1\% = 0.001$

$n = 10\,000$

$P(X > 10) = ?$ där X = antal olyckor

$X \in \text{Bin}(\underbrace{10\,000}_{n}, \underbrace{0.001}_{p})$

$n > 10,\ p < 0.1 \Rightarrow$

$\Rightarrow X \overset{\text{appr.}}{\in} \text{Poi}(np) = \text{Poi}(10)$

$\Rightarrow P(X > 10) = 1 - \sum_{k=0}^{10} P(X = k)$

$= 1 - \sum_{k=0}^{10} e^{-10} \frac{10^k}{k!}$

$$= 1 - e^{-10}\Big(\overset{0}{1} + \overset{1}{10} + \overset{2}{\frac{100}{2}} + \overset{3}{\frac{1000}{6}} + \overset{4}{\frac{10\,000}{24}} + \overset{5}{\frac{100\,000}{120}} + \overset{6}{\frac{1\,000\,000}{720}} +$$

$$+ \frac{10\,000\,000}{5040} + \frac{100\,000\,000}{40320} + \frac{1\,000\,000\,000}{362\,880} + \frac{10\,000\,000\,000}{3\,628\,800}\Big)$$

$= 1 - 0.5830398 = 0.4169602 \approx 0.417$

Om man räknar med N-appr.:

$X \overset{\text{appr.}}{\in} N(np, \sqrt{np(1-p)}) = N(10, 3)$

$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) =$ $\boxed{\text{halv-korrektion!}}$

$= 1 - \Phi\left(\frac{10 + 0.5 - 10}{3}\right) = 1 - \Phi(0.17) =$

$= 1 - 0.5675 = \underline{\underline{0.4325}}$

3.33 Låt X = antal inhöpta granar
Y = antal efterfrågade granar

y	1	2	3	4	5
$P(Y=y)$	0.1	0.1	0.3	0.3	0.2

Vinsten för Pelle beror på om $X \le Y$ eller $X > Y$.

$\underline{X \le Y}$ $\quad V = -X \cdot 30 + X \cdot 90$
$= 60X$

$\underline{X > Y}$ $\quad V = -X \cdot 30 + Y \cdot 90 - (X-Y) \cdot 10$
$= 100Y - 40X$

Givet $X=x$ är vinsten $V = \begin{cases} 60x & \text{om } x \le Y \\ 100Y - 40x & \text{om } x > Y \end{cases}$

så för alla olika kombinationerna av x och y är v:

x \ y	1	2	3	4	5
1	60	60	60	60	60
2	20	120	120	120	120
3	-20	80	180	180	180
4	-60	40	140	240	240
5	-100	0	100	200	300

Givet $X = x$ är den stokastiska variabeln V endast stokastisk genom Y. Dvs vinsten är en funktion av Y: $V = g_x(Y)$ så

$$E(V \mid X = x) = E(g_x(Y) \mid X = x)$$

$$\left\{ \text{där } g_x(Y) = \begin{cases} 60x & \text{om } x \leq Y \\ 100Y - 40x & \text{om } x > Y \end{cases} \right\}$$

$$= \sum_{y=1}^{5} g_x(y) P(Y = y) \quad \text{varmed}$$

$$E(V \mid X = 1) = \underbrace{g_1(1)}_{60} \underbrace{P(Y=1)}_{0.1} + \underbrace{g_1(2)}_{60} \underbrace{P(Y=2)}_{0.1} + \ldots + \underbrace{g_1(5)}_{60} \underbrace{P(Y=5)}_{0.2}$$

$$= 60$$

$$E(V \mid X = 2) = 20 \cdot 0.1 + 120 \cdot 0.1 + \ldots + 120 \cdot 0.2$$

$$= 110$$

$$E(V \mid X = 3) = -20 \cdot 0.1 + 80 \cdot 0.1 + 180 \cdot 0.3 + \ldots + 180 \cdot 0.2$$

$$= 150$$

$$E(V \mid X = 4) = -60 \cdot 0.1 + 40 \cdot 0.1 + 140 \cdot 0.3 + 240 \cdot 0.3 + 240 \cdot 0.2$$

$$= 180$$

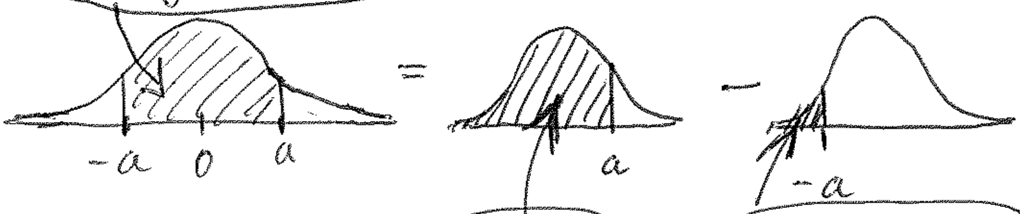
$$E(V \mid X = 5) = -100 \cdot 0.1 + 0 + 100 \cdot 0.3 + 200 \cdot 0.3 + 300 \cdot 0.2$$

$$= 140 \quad \text{(avtagande för större } x\text{)}$$

Alltså får Pelle störst förväntad vinst, 180 kr., om han köper 4 granar!

4.15 c) $P(|\xi| < a) = 0.95, \quad \xi \in N(0,1)$

$$P(|\xi| < a) = P(-a < \xi < a) =$$



$$P(\xi < a) - P(\xi < -a)$$

$$= P(\xi < a) - P(\xi > a)$$

$$= P(\xi < a) - (1 - P(\xi < a))$$

$$= 2P(\xi < a) - 1$$

$$= 2\Phi(a) - 1 = 0.95$$

$$\Rightarrow \Phi(a) = \frac{0.95 + 1}{2} = 0.975$$

$$\Rightarrow a = 1.960 \quad \text{(från tabell)}$$

4.15 c,

4.29 f) $\xi \in N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{\xi - \mu}{\sigma} \in N(0,1)$

$$P(|\xi-\mu| < \sigma) = P(-\sigma < \xi-\mu < \sigma) =$$

$$= P(\xi-\mu < \sigma) - P(\xi-\mu < -\sigma)$$

$$= P(\xi-\mu < \sigma) - P(\xi-\mu > \sigma)$$

$$= P(\xi-\mu < \sigma) - (1 - P(\xi-\mu < \sigma))$$

$$= 2P(\xi-\mu < \sigma) - 1$$

$$= 2P\left(\frac{\xi-\mu}{\sigma} < 1\right) - 1$$

$$= 2\Phi(1) - 1$$

$$= 2 \cdot 0.8413 - 1$$

$$= 0.6826$$

4.30 f) $\xi \in Exp(\lambda)$

$$\Rightarrow \mu = E(\xi) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma^2 = V(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$P(|\xi - \mu| < \sigma) = P\left(-\frac{1}{\lambda} < \xi - \frac{1}{\lambda} < \frac{1}{\lambda}\right) =$$

$$= P(-1 < \lambda\xi - 1 < 1)$$

$$= P(0 < \lambda\xi < 2)$$

$$= P\left(\xi < \frac{2}{\lambda}\right) \quad \{\text{Eftersom } \xi > 0\}$$

$$= 1 - e^{-\lambda \cdot \frac{2}{\lambda}}$$

$$= 1 - e^{-2}$$

$$= 0.864665$$

		Insats	Förväntad återbäring	Standard-avvikelse
5.8	A	1	0.9	0.3
	B	4	3.6	1

spelar $\underbrace{3}_{\text{ober.}}$ ggr vid A och $\underbrace{2}_{\text{ober.}}$ vid B.

Låt X_i vara förlusten gång i som man spelar på A, $i=1,2,3$

Y_i vara förlusten gång j som man spelar på B, $j=1,2$

Z_i återbäringen vid spel på A

W_i återbäringen vid spel på B

Då är $X_i = \text{Insats}_A - Z_i = 1 - Z_i$

$Y_i = \text{Insats}_B - W_i = 4 - W_i$

och
$$E(X_i) = E(1 - Z_i) = 1 - \underbrace{E(Z_i)}_{=0.9} = 0.1$$

$$\frac{E(T)}{V(T)} = \frac{0.2m + 0.7n}{0.04m + 2.25n}$$

$0.25m$

$$\frac{1}{0.25} \cdot \frac{0.1m + 0.9n}{m + 9n} = \frac{0.1}{0.25} = \frac{1}{2.5} = 0.4$$

$$E(Y_i) = E(4 - W_i) = 4 - \underbrace{E(W_i)}_{=3.6} = 0.4$$

$$V(X_i) = V(1 - Z_i) = V(Z_i) = 0.3^2 = 0.09$$

$$V(Y_i) = V(4 - W_i) = V(W_i) = 1^2 = 1$$

Så totalt får med $T = X_1 + X_2 + X_3 + Y_1 + Y_2$

$$E(T) = \sum_{i=1}^{3} E(X_i) + \sum_{j=1}^{2} E(Y_j) = 3 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.4 = \underline{\underline{1.1}}$$

$$V(T) \overset{\text{ober.}}{=} \sum_{i=1}^{3} V(X_i) + \sum_{j=1}^{2} V(Y_j) = 3 \cdot 0.09 + 2 \cdot 1 = 2.27$$

Standardavv. $= \sqrt{2.27} \approx \underline{\underline{1{,}51}}$