6.6 $\begin{cases} P(X > 1.01) = 0.08 & (1) \\ P(X \leq 0.99) = 0.02 & (2) \end{cases}$

$$(1):\ 0.08 = P(X > 1.01) = 1 - P(X \leq 1.01) = 1 - \Phi\left(\frac{1.01-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\Phi\left(\frac{1.01-\mu}{\sigma}\right) = 1 - 0.08 = 0.92$$

$$\frac{1.01-\mu}{\sigma} = 1.41$$

$$(2):\ 0.02 = P(X \leq 0.99) = \Phi\left(\frac{0.99-\mu}{\sigma}\right) =$$

{ komihåg: $\Phi(a) = 1 - \Phi(-a)$ }

$$= 1 - \Phi\left(-\frac{0.99-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\Phi\left(-\frac{0.99-\mu}{\sigma}\right) = 1 - 0.02 = 0.98$$

$$-\frac{0.99-\mu}{\sigma} = 2.05$$

$$\begin{cases} 1.01 - \mu = 1.41\sigma & (1') \\ 0.99 - \mu = -2.05\sigma & (2') \end{cases}$$

$$(1') - (2'):\ 1.01 - 0.99 = 1.41\sigma + 2.05\sigma$$

$$\sigma = \frac{1.01 - 0.99}{1.41 + 2.05} = 0.00578$$

$$i\ -(2'):\ -0.99 + \mu = 2.05 \cdot 0.00578$$

$$\mu = 2.05 \cdot 0.00578 + 0.99 = 1.002$$

Svar: $\mu = 1.002$ och $\sigma = 0.0058$

6.14 Man får anta att tjockleken $N(0.4, 0.05)$ är angivet i cm (där 0.05 är standardavvikelsen σ enligt bokens notation).

Antag nu att varje kex är $X_i \in N(0.4, 0.05)$ tjockt och att tjocklekarna är oberoende av varandra. Då blir kexpaketet totalt

a) $L = \sum_{i=1}^{28} X_i$ långt.

Och kexpaketet kommer att innehålla minst 28 kex om $L < 12$. Eftersom X_i är oberoende och normalfördelade är $\sum_{i=1}^{28} X_i$ normalfördelad med

$$\mu = E(L) = \sum_{i=1}^{28} E(X_i) = 28 \cdot 0.4 = 11.2$$

$$\sigma^2 = V(L) \overset{\text{ober.}}{=} \sum_{i=1}^{28} V(X_i) = 28 \cdot 0.05^2 = 0.07$$

OBS! $=\sigma^2$

och därmed är $L \in N(11.2, \overbrace{0.07}^{=\sigma^2})$

$P(\text{kexpaketet innehåller minst 28 kex}) =$

$$= P(L < 12) = P\Big(\underbrace{\frac{L - 11.2}{\sqrt{0.07}}}_{\in N(0,1)} < \frac{12 - 11.2}{\sqrt{0.07}}\Big) =$$

$$= \Phi(3.02) = 0.9988$$

b) På liknande sätt får vi

$L = \sum_{i=1}^{30} X_i$ så i detta fall

blir $E(L) = 30 \cdot 0.4 = 12$

och $V(L) = 30 \cdot 0.05^2 = 0.075$

varmed $P(\text{minst 30 kex}) =$

$= \Phi(0) = 0.5$

Jag tycker de också borde ha frågat

c) Vad blir $P(\text{minst 31 kex})$?

Då skulle vi fått $L \in N(12.4, 0.0775)$

varmed $P(L < 12) = \Phi\left(\frac{12 - 12.4}{\sqrt{0.0775}}\right) =$

$= \Phi(-1.44) = 1 - \Phi(1.44) = 0.0149$

Exempel (på användning av CGS)

Ett datorprogram skall provköras i ett datornätverk bestående av 1000 datorer. Från 97 rapporteras fel där driftansvarig måste ingripa.

a) Antag att en driftpersonalen, Anna, ägnar sig enbart åt att fixa dessa fel och att det tar henne X_i minuter att åtgärda fel i, där $E(X) = 5$ och $V(X) = 1$. Vad är sannolikheten att hon hinner fixa alla 97 fel innan hennes 8 timmars arbetsdag är slut?

b) Hur många timmar måste Anna arbeta för att sannolikheten att hon ska hinna med alla 97 datorerna ska bli (minst) 0.9?

c) Hur många datorer kan det maximalt finnas i nätverket så att sannolikheten att Anna hinner laga allihop på 8 timmar är minst 0.99?

a) Den tid det tar Anna att laga alla 97 datorer är $T = \sum_{i=1}^{97} X_i$ min.

där $E(T) = \sum_{i=1}^{97} E(X_i) = 97 \cdot 5 = 485$

$V(T) = \sum V(X_i) = 97 \cdot 1^2 = 97$

så enl. CGS är $T \overset{appr.}{\in} N(485, 97)$

varmed

$$P(\text{klar på 8 tim}) = P(T \leq 8 \cdot 60) = \Phi\left(\frac{480-485}{\sqrt{97}}\right) = \Phi(-0.5077) = 1 - \Phi(0.5077) = 1 - 0.695 = \underline{0.305}$$

b) Fortfarande $T \overset{appr.}{\in} N(485, 97)$ varmed

$0.9 < P(\text{klar på } n \text{ tim.}) = P(T \leq n) = \Phi\left(\frac{n-485}{\sqrt{97}}\right)$

n	480	500	495	497	498
$\frac{n-485}{\sqrt{97}}$	−0.5077	1.523	1.0153	1.218	1.320
$\Phi\left(\frac{n-485}{\sqrt{97}}\right)$	0.305	0.9357	0.8461	0.8888	0.9049

Svar: Anna måste hålla på 498 min dvs 8h 18min

c) $E(T) = E\left(\sum_1^n X_i\right) = \sum_1^n \underbrace{E(X_i)}_{5} = 5n$

$V(T) = V\left(\sum_1^n X_i\right) = \sum_1^n V(X_i) = n$

så $T \overset{appr.}{\in} N(5n, \sqrt{n})$ varmed

$0.99 < P(\text{klar på 8 tim}) = P(T \leq 8 \cdot 60) = \Phi\left(\frac{480-5n}{\sqrt{n}}\right)$

n	90	95	92	91
$\frac{480-5n}{\sqrt{n}}$	3.16	0.513	2.08	2.62
$\Phi\left(\frac{480-5n}{\sqrt{n}}\right)$	>0.999	0.695	0.981	0.9956

Svar: Hon klarar max 91 datorer med sannolikhet 0.99

6.28 Låt X_i vara vikten av den i:te tabletten
Då är vikten av de 99 första tabletterna

$$Y = \sum_{i=1}^{99} X_i \quad \text{och } E(Y) = 99 \cdot 0.5 = 49.5$$

$$\sigma^2 = V(Y) = 99 \cdot 0.04^2 = 0.1584$$

varmed $Y \overset{\text{appr.}}{\in} N(49.5, 0.1584)$.

Händelsen att det är minst 100 tabletter i burken är densamma som att vågen inte givit utslag när 99 tabletter hällts i vågskålen. Dvs att vikten Y inte ännu blivit 50.5 gram. Dvs att $Y \leq 50.5$ och därmed är

$$P(\text{minst 100 tabletter}) = P(Y \leq 50.5) =$$

$$= \Phi\Big(\underbrace{\frac{50.5 - 49.5}{\sqrt{0.1584}}}_{2.51}\Big) = 0.994$$

7.1 b) $$\sum_{i=1}^{9} x_i = 126.9$$

$$\sum_{i=1}^{9} x_i^2 = 1921.29$$

En (vvr) punktskattning av σ^2 är

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)$$

(enl. formeln (1.1) på s. 9)

Använder vi denna med $n = 9$ här får vi

$$s^2 = \frac{1}{8}\left(1921.29 - \underbrace{\frac{1}{9} \cdot 126.9^2}_{1789.29}\right)$$

$$= 16.5$$

7.13 $X_1, \dots, X_n \in R(0, \theta)$

$\theta_1^* = a_n \bar{X} \qquad \theta_2^* = b_n \max_i X_i$

a) a_n, b_n så att θ_1^*, θ_2^* vvr skattn. av θ

b) Vilken är effektivast?

c) Beräkna $(\theta_1)^*_{obs}, (\theta_2)^*_{obs}$ då $(x_1, \dots, x_5) =$
$= (0.3, 0.8, 1.9, 0.2, 1.5)$

---

a) $\underline{\theta_1^*}$ $E(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_i E(X_i) = \frac{1}{n} n \cdot \frac{0+\theta}{2} = \frac{\theta}{2}$

så θ_1^* vvr om $E(\theta_1^*) = \theta$ dvs om

$\theta = E(a_n \bar{X}) = a_n E(\bar{X}) = a_n \frac{\theta}{2}$ dvs $a_n = 2$

$\underline{\theta_2^*}$ $E(\max_i X_i) = ?$ För att beräkna detta räknar vi först ut fördelningen

$$P(\max X_i \leq x) = P(X_1 \leq x) P(X_2 \leq x) \cdots P(X_n \leq x)$$
$$= \frac{x}{\theta} \cdot \frac{x}{\theta} \cdots \frac{x}{\theta}$$
$$= \frac{x^n}{\theta^n}$$

så frekvensfunktionen $f_{max}(x)$ är

$$f_{max}(x) = \frac{d}{dx} F_{max}(x)$$
$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{\theta^n}\right)$$
$$= n \frac{x^{n-1}}{\theta^n}$$

och därmed är $E(\max X_i) = \int_0^\theta x f_{max}(x)\, dx =$

$$= \int_0^\theta x\, n \frac{x^{n-1}}{\theta^n}\, dx = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta x^n\, dx = \frac{n}{\theta^n}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^\theta =$$

$$= \frac{n}{\theta^n}\left(\frac{\theta^{n+1}}{n+1} - \frac{0}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}\theta$$

så för att $E(\theta_2^*) = \theta$ ska

$\theta = b_n E(\max X_i) = b_n \frac{n}{n+1} \theta$ dvs $b_n = \frac{n+1}{n}$

b) $\theta_1^* = 2\bar{X}$ $\quad\theta_2^* = \frac{n+1}{n} \max X_i$

Vilken skattning är effektivast

dvs vilken är minst av $V(\theta_1^*)$ och $V(\theta_2^*)$?

$\underline{\theta_1^*}$ $V(\theta_1^*) = V(2\bar{X}) = 4V(\bar{X}) = 4\frac{1}{n^2}\sum V(X_i) = \frac{4}{n}V(X_i)$

$$V(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2$$

$$E(X_i^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^\theta x^2 \frac{1}{\theta}\,dx$$

$$= \frac{1}{\theta}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\theta$$

$$= \frac{1}{\theta}\frac{\theta^3}{3} = \frac{\theta^2}{3}$$

Så $V(X_i) = \frac{\theta^2}{3} - \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{\theta^2}{3} - \frac{\theta^2}{4} = \frac{\theta^2}{12}$

och $V(\theta_1^*) = \frac{4}{n}V(X_i) = \frac{4}{n}\cdot\frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n}$

$\underline{\theta_2^*}$ $V(\theta_2^*) = V\left(\frac{n+1}{n}\max X_i\right) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 V(\max X_i)$

Låt $Z = \max X_i$

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$$

$$E(Z^2) = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_{max}(z)\,dz$$

$$= \int_0^\theta z^2\, n\frac{z^{n-1}}{\theta^n}\,dz$$

$$= \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta z^{n+1}\,dz$$

$$= \frac{n}{\theta^n}\left[\frac{z^{n+2}}{n+2}\right]_0^\theta$$

$$= \frac{n}{\theta^n}\frac{\theta^{n+2}}{n+2}$$

$$= \frac{n}{n+2}\theta^2$$

så $V(Z) = \frac{n}{n+2}\theta^2 - \left(\frac{n}{n+2}\theta\right)^2$

$= \theta^2 n\left(\frac{1}{n+2} - \frac{n}{(n+2)^2}\right)$

varmed $V(\theta_2^*) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 V(Z)$

$= \frac{(n+1)^2}{n^2}\theta^2 n\left(\frac{1}{n+2} - \frac{n}{(n+2)^2}\right)$

$= \theta^2\left(\frac{(n+1)^2}{n}\cdot\frac{1}{n+2} - \frac{(n+1)^2}{n}\cdot\frac{n}{(n+1)^2}\right)$

$= \theta^2\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} - 1\right)$

$= \theta^2\left(1 + \frac{1}{n^2+2n} - 1\right)$

$= \theta^2\frac{1}{n(n+2)}$

Så vi ska jämföra $V(\theta_1^*) = \frac{\theta^2}{3n}$ med $V(\theta_2^*) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$. Men $\frac{1}{3} > \frac{1}{n+2}$ då $n>1$

så genom att förlänga med $\frac{\theta^2}{n}$ i båda led ~~ø~~ i den olikheten fås att

$V(\theta_1^*) = \frac{\theta^2}{n}\cdot\frac{1}{3} > \frac{\theta^2}{n}\cdot\frac{1}{n+2} = V(\theta_2^*)$ då $n>1$

och alltså är θ_2^* effektivare än θ_1^* då $n>1$.

c) $(\theta_1)^*_{obs} = 2\bar{x} = \frac{2}{5}(0.3+0.8+1.9+0.2+1.5) = 1.88$

$(\theta_2)^*_{obs} = \frac{5+1}{5}\max x_i = \frac{6}{5}\cdot 1.9 = 2.28$

9.25 250 maskiner, 60 stilla

$P(\text{maskin stilla}) = p \qquad X_i = \begin{cases} 0 & 1-p \\ 1 & p \end{cases}$ funkar / stilla

Testa $\begin{cases} H_0 : p = 0.2 \\ H_1 : p > 0.2 \end{cases} \qquad \alpha = 0.01$

$$U = \sum_{i=1}^{250} X_i \in \text{Bin}(250, 0.2) \text{ under } H_0$$

$$\approx N(np_0, \sqrt{np_0(1-p_0)})$$

$$(\text{ty } np_0(1-p_0) = 40 > 10)$$

$u = 60$

$$\alpha_0 = P(U > 60 \mid H_0)$$

$$= 1 - P(U < 60 \mid H_0)$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{60 - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{60-50}{\sqrt{40}}\right)$$

$$= 1 - \Phi(1.5811) \qquad \left(\begin{matrix}\text{med halvkorr.} \\ 1 - \Phi(1.502)\end{matrix}\right)$$

$$= 1 - 0.9429$$

$$= 0.0571 \qquad \left(\begin{matrix}\text{med halvkorr.} \\ 0.0668\end{matrix}\right) \qquad \boxed{\begin{matrix}\text{FACIT} \\ 0.08??\end{matrix}}$$

$\alpha_0 = 0.0571 > 0.01 = \alpha$ så

H_0 kan ej förkastas på nivå 0.01

(ej ens på 0.05-nivån!)

9.27 10000 böter om > 1% defekta
tar 200 kort ur varje av 80 fpg ar

a) Skattning av felkvoten

$p = P(\text{ett kretskort defekt})$

$$\hat{p} = \frac{\#\ \text{defekta}}{\#\ \text{totalt}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

där $X_i = \begin{cases} 1 & \text{om kretskort } i \text{ defekt} \\ 0 & \text{om kretskort } i \text{ fungerar} \end{cases}$

I detta fall $\hat{p}_{obs} = \frac{1}{16000}(1+2+1+3+3+4+2+\ldots+1) =$

$$= \frac{27+12+22+23+24+21+21+18}{16000} = 0.0105$$

(radsummorna)

b) Enligt CGS är $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{appr.}}{\in} N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

där $\mu = E(X_i) = p$ och $\sigma^2 = V(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2$

$E(X_i^2) = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p = p \Rightarrow V(X_i) = p(1-p)$

$$\Rightarrow \hat{p} \overset{\text{appr.}}{\in} N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right) \Rightarrow \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\hat{p}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} \overset{\text{appr.}}{\in} N(0,1)$$

Vi vill testa $\begin{cases} H_0: p = 0.01 \\ H_1: p > 0.01 \end{cases}$ och får

$$\frac{\sqrt{16000}\,(0.0105 - 0.01)}{\sqrt{0.01(1-0.01)}} = 0.63564$$

Men $\lambda_{0.001} = 3.0902$ och

$0.63564 \not> 3.0902$ så nollhypotesen kan inte förkastas, dvs böteskausulen bör ej träda ikraft.