© 2005 Eric Järpe
Högskolan i Halmstad

# Sannolikhetslära

Sannolikhetslära handlar om att *mäta* hur sannolikt (dvs "hur ofta") man kan förvänta sig att något inträffar. Därför sorterar sannolikhetsläran under den matematiska underrubriken *måtteori* (även kallat *integrationsteori*). Strax ska vi definiera begreppet *sannolikhet* i enlighet med måtteori, men låt oss börja med några andra grundläggande begrepp och den klassiska defintionen.

Låt oss betrakta två exempel. I exempel 1 kastar vi en tärning en gång. I exempel 2 kastar vi samtidigt en grön och en röd tärning en gång. Detta är exempel på två *experiment*. Varje experiment kan ha olika resultat (*händelser*). *Utfallen* är de minsta beståndsdelar som bygger upp de olika händelserna. Tillsammans bildar utfallen mängden av allt som kan inträffa, *utfallsrummet*.

| *Begrepp* | *Förklaring* | *Värde i exemplen* |
|---|---|---|
| **Experiment** | Specifikation av en situation som kan få olika förlopp | 1: Kasta en tärning<br>2: Kasta två tärningar |
| **Utfall** | De möjliga resultaten av experimentet (Atomära händelser) | 1: 1, 2, 3, 4, 5, 6<br>2: $(1,1),(1,2),\dots,(6,5),(6,6)$ |
| **Händelse** | Sammansättning av utfall | 1: $A_1 = \{\text{vi slår en sexa}\} = \{6\}$<br>$B_1 = \{\text{vi slår högst 4}\} = \{1,2,3 \text{ eller } 4\}$<br>2: $A_2 = \{\text{gröna tärningen är en sexa}\}$<br>$= \{(6,1),(6,2),\dots,(6,6)\}$<br>$B_2 = \{\text{summan är 7}\}$<br>$= \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$ |
| **Utfallsrum** $\Omega$ | Mängden av alla utfall | 1: $\{1,2,3,4,5,6\}$<br>2: $\{(1,1),(1,2),\dots,(5,6),(6,6)\}$ |

**Definition 1** Den klassiska definitionen
**Sannolikheten** *för att ett experiment utmynnar i en händelse $A$ betecknas $P(A)$ och defineras som antalet utfall gynnsamma för $A$, $g(A)$, i proportion mot det totala antalet utfall som experimentet kan utmynna i, $m$:*

$$P(A) = \frac{\#\{\textit{gynnsamma utfall}\}}{\#\Omega} = \frac{g(A)}{m}$$

**Multiplikationsprincipen**

<u>Om</u> ett experiment kan indelas i $j$ delexperiment där
det första kan få $n_1$ utfall
det andra kan få $n_2$ utfall
$\vdots$
det $j$:te kan få $n_j$ utfall

<u>så</u> har experimentet $n_1 \cdot n_2 \cdots n_j$ utfall.

**Exempel**

I exemplet med den röda och den gröna tärningen ger kast med den röda 6 utfall och kast med den gröna också 6 utfall varmed experimentet har totalt $6 \cdot 6 = 36$ utfall.

Låt oss beräkna sannolikherna för händelserna $A_1, B_1, A_2$ och $B_2$.

1: $P(A_1) = \frac{g(A_1)}{m_1} = \frac{\#\{6\}}{\#\{1,2,3,4,5,6\}} = \frac{1}{6}$

$P(B_1) = \frac{g(B_1)}{m_1} = \frac{\#\{1,2,3,4\}}{\#\{1,2,3,4,5,6\}} = \frac{2}{3}$

2: $P(A_2) = \frac{g(A_2)}{m_2} = \frac{\#\{(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\}}{\#\{(1,1),(1,2),\ldots,(6,6)\}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(B_2) = \frac{g(B_2)}{m_2} = \frac{\#\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}}{\#\{(1,1),(1,2),\ldots,(6,6)\}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ $\square$

**Exempel** Antag att vi knackar på hos en fembarnsfamilj och att barnen i tur och ordning kommer till dörren. På hur många sätt kan det inträffa?

**Lösning:** Eftersom varje barn kan vara antingen pojke eller flicka blir det totala antalet konfigurationer $2^5 = 32$ stycken. $\square$

**Kombinatorik/binomialkoefficienter**

Antalet sätt man kan välja $k$ element bland $n$ möjliga *utan* återläggning och *utan* hänsyn till ordningen är

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Kom ihåg: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$.

Läs om Pascals triangel!

**Observera** $P(\Omega) = 1$. (Mycket användbar regel!)

**Exempel** Vad är sannolikheten att det hos en fembarnsfamilj (i ett område med lika stor andel pojkar som flickor) finns

(a) 1 pojke och 4 flickor?

(b) 2 pojkar och 3 flickor?

(c) övriga konfigurationer?

**Lösning:**

(a) Antalet sätt för 1 pojke och 4 flickor är $\binom{5}{1} = 1$ (dvs $(P, F, F, F, F), (F, P, F, F, F)$, $\ldots, (F, F, F, F, P))$. Det totala antalet sätt är $2^5 = 32$ varmed $P(1P, 4F) = \frac{5}{32}$.

(b) $\#\{2P, 3F\} = \binom{5}{2} = 10$ varmed $P(2P, 3F) = \frac{10}{32}$.

(c) Pga symmetriregeln för binomialkoefficienterna är $P(3P, 2F) = \frac{10}{32}$ och $P(4P, 1F) = \frac{5}{32}$. Vidare, eftersom $\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1$ så är $P(5F) = P(5P) = \frac{1}{32}$.
Kontroll:
$P(5F) + P(4F, 1P) + P(3F, 2P) + P(2F, 3P) + P(1F, 4P) + P(5P) = 1.$ □

**Exempel** Kalle köper 5 lotter på ett lotteri med 100 lotter varav
1 ger 100 000:-
2 ger en bostadsrätt
2 ger en kolonilott
5 ger en cykel
5 ger 100:-
Vad är chansen att han vinner

(a) minst 3 cyklar?

(b) 200:-, 1 cykel och 1 kolonilott (och inget annat)?

(c) bostad eller pengar?

(d) något överhuvudtaget?

**Lösning:**

(a) $P(\text{minst 3 cyklar}) = P(\text{3 cyklar}) + P(\text{4 cyklar}) + P(\text{5 cyklar}) =$
$= \binom{5}{3}\frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} \cdot \frac{3}{98} \cdot \frac{95}{97} \cdot \frac{94}{96} + \binom{5}{4}\frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} \cdot \frac{3}{98} \cdot \frac{2}{97} \cdot \frac{95}{96} + \binom{5}{5}\frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} \cdot \frac{3}{98} \cdot \frac{2}{97} \cdot \frac{1}{96} =$
$= \frac{46\,126}{75\,287\,520} \approx 0.0006127.$

(b) $P(\text{200:- och 1 cykel och 1 kolonilott}) = \frac{2}{100} \cdot \frac{1}{99} \cdot \frac{5}{98} \cdot \frac{2}{97} \cdot \frac{85}{96} \cdot \frac{5!}{2} \approx 0.0000113.$

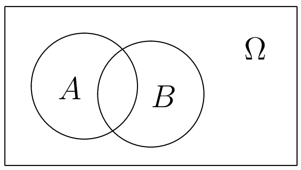
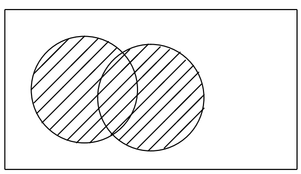
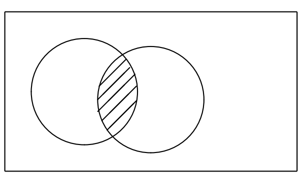
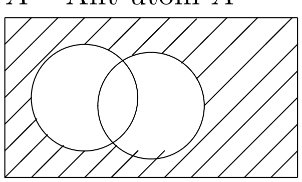
(c) $P(\text{bostad eller pengar}) = P(\text{inte bara cyklar och nitlotter}) =$
$= 1 - P(\text{bara cyklar och nitlotter}) = 1 - \frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99} \cdot \frac{88}{98} \cdot \frac{87}{97} \cdot \frac{86}{96} \approx 0.4162476.$

(d) $P(\text{något}) = 1 - P(\text{inget}) = 1 - \frac{85}{100} \cdot \frac{84}{99} \cdot \frac{83}{98} \cdot \frac{82}{97} \cdot \frac{81}{96} \approx 0.5643167.$ □

På det här viset kan man klara av sannolikheter för händelser ur uppräkneliga (dvs numrerbara) utfallsrum.

Men tänk t.ex. om Pelle hoppar längdhopp och att han kan mäta sina hopp med godtyckligt hög precision. Vad blir nu utfallen av ett hopp? Utfallsrummet måste vara de positiva reella talen $\Omega = \mathbb{R}^+$ och händelser från detta utfallsrum t.ex. "ett hopp är längre än 4 meter". Men vilka är utfallen? Detta är ett exempel med överuppräkneligt utfallsrum och för att klara av det behövs en generalisering av sannolikhetsbegreppet.

Ett framgångsrikt angreppssätt är att likna händelser vid mängder. Låt oss börja med att repetera lite mängdlära.

| *Namn* | *Förklaring* | *Värde i exemplen* |
|---|---|---|
| **Venn-diagram** | <br> | 1: $A_1 = \{6\}$<br>$B_1 = \{\leq 4\}$<br>2: $A_2 = \{\text{gröna} = 6\}$<br>$B_2 = \{\text{summan} = 7\}$ |
| **Union** | $A \cup B$ "$A$ eller $B$"<br> | 1: $A_1 \cup B_1 = \{= 6 \text{ eller } \leq 4\} = \{6, 1, 2, 3, 4\}$<br>2: $A_2 \cup B_2 = \{\text{gröna} = 6 \text{ eller summan} = 7\}$<br>$= \{(6,1), \ldots, (6,6), (5,2), \ldots, (1,6)\}$ |
| **Snitt** | $A \cap B$ "$A$ och $B$"<br> | 1: $A_1 \cap B_1 = \{= 6 \text{ och } \leq 4\} = \emptyset$<br>2: $A_2 \cap B_2 = \{\text{gröna} = 6 \text{ och summan} = 7\}$<br>$= \{(6,1)\}$ |
| **Komplement** | $A^c$ "Allt utom $A$"<br> | 1: $A_1^C = \{\neq 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$<br>2: $A_2^C = \Omega \setminus \{\text{gröna} = 6\}$<br>$= \{(1,1), (1,2), \ldots, (5,5), (5,6)\}$ |

Två händelser $A, B$ är **disjunkta** om de "inte kan inträffa samtidigt", dvs om $A \cap B = \emptyset$. Lär De Morgans lagar: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ och $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$. Indelning av hela utfallsrummet $\Omega$ i disjunkta delmängder kallas **partition**.

**Definition 2** Den moderna definitionen
*En funktion $P$, som till varje händelse $A$ ur ett utfallsrum $\Omega$ ordnar $P(A) \in \mathbb{R}$, är ett* **sannolikhetsmått** *om*

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ *för alla* $A \in \Omega$,
2. $P(\Omega) = 1$,
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *för alla disjunkta* $A, B \in \Omega$.

$P$ mäter den "mass-/yt-"andel som upptas av $A$ relativt utfallsrummet $\Omega$. Tilläggas bör också att den moderna definitionen sammanfaller med (dvs ger samma resultat som) den klassiska i de fall det handlar om uppräkneliga utfallsrum. Inte desto mindre kan den klassiska vara ett pedagogiskt första steg att ta och man kan naturligtvis använda den närhelst man föredrar den i de fall den är tillämpbar.

**Sats 2B** Komplementsatsen: $P(A^C) = 1 - P(A)$.

**Sats 2C** Additionssatsen: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

**Övning** Härled Satserna 2B och 2C från definitionen av sannolikhet och mängdlagarna.