© 2005 Eric Järpe
Högskolan i Halmstad

Beroende och oberoende

Händelser som påverkar varandras sannolikhet kallas *beroende*.

Definition 1 *Om* $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ *kallas* A *och* B **oberoende** *vilket skrivs* $A \perp B$. *Annars (dvs om* $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$*) kallas* A *och* B **beroende** *(*$A \not\perp B$*).*

Obs Skilj på *oberoende* händelser och *disjunkta* händelser. Dessa är snarare motsatser än synonymer. T.ex. är A och A^C disjunkta men knappast oberoende. Visa detta som övning!

Läs Exempel 2.17.

Exempel Låt $P(A) = 0.8$ och $P(B^C) = 0.3$ där $A \perp B$. Beräkna $P(A \cup B)$.

Lösning: Eftersom A och B är oberoende är

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B^C)) = 0.56$$

varmed, enligt additionssatsen,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.94$$

$\square$

Betingad sannolikhet

Definition 2 *Den* **betingade sannolikheten av** A **givet** B *är*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

närhelst $P(B) > 0$*. Om* $P(B) = 0$ *så är* $P(A|B)$ *odefinierad.*

Obs 1 $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$.

Obs 2 $P(A|B) = P(B|A)P(A)/P(B)$

Sats 1 Bayes sats
Om $A_1, \ldots, A_n$ *är en partition av* Ω *så är*

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$$

för alla $k = 1, \ldots, n$.

Övning Härled Obs 1 och Obs 2 från defintionen av betingad sannolikhet.

Övning Uttryck $P(A|B)$ enbart m.h.a. $P(A)$, $P(B|A)$ och $P(B|A^C)$ genom att använda Obs 1 och Obs 2.

Exempel En student tar en kurs där *en* valfri laboration utgör ett obligatoriskt kursmoment. Han väljer att göra lab i, $i = 1, 2, 3$ enligt: $P(\text{lab } 1) = 0.41$, $P(\text{lab } 2) = 0.34$, $P(\text{lab } 3) = 0.25$ och baserat på resultat från tidigare studenter är $P(\text{klara tentan}|\text{lab } 1) = 0.37$, $P(\text{klara tentan}|\text{lab } 2) = 0.45$, $P(\text{klara tentan}|\text{lab } 3) = 0.63$.

(a) Hur stor är studentens chans att klara tentan?

(b) Vilken laboration ska studenten välja för att ha störst chans att klara tentan?

(c) Studenten får veta att en kompis klarade tentan förra året. Vad är sannolikheten att kompisen gjorde lab 1 eller lab 2?

Lösning: Eftersom labben är obligatorisk och man endast behöver göra en lab kan $\{\text{lab } 1, \text{lab } 2, \text{lab } 3\}$ betraktas som en partition av $\Omega = \{\text{de labbar som studenten gör}\}$. Låt beteckningen T betyda "klara tentan" och $\ell 1$, $\ell 2$, $\ell 3$ betyda att man valt laboration 1, 2 respektive 3.

(a) $P(T) = P(\{T \cap \ell 1\} \cup \{T \cap \ell 2\} \cup \{T \cap \ell 3\}) = P(T|\ell 1)P(\ell 1) + P(T|\ell 2)P(\ell 2) + P(T|\ell 3)P(\ell 3) = 0.37 \cdot 0.41 + 0.45 \cdot 0.34 + 0.63 \cdot 0.25 = 0.4622.$

(b) $P(T|\ell 3) = 0.63 > 0.45,\ 0.37$ så laboration 3!

(c) $P(\ell 1 \cup \ell 2|T) = 1 - P(\ell 3|T) =$

$$= 1 - \frac{P(T|\ell 3)P(\ell 3)}{P(T|\ell 1)P(\ell 1) + P(T|\ell 2)P(\ell 2) + P(T|\ell 3)P(\ell 3)} = 1 - \frac{0.1575}{0.4622} = 0.659.$$

□

Binomialsannolikhet Antag att $P(A) = p$. Sannolikheten att A inträffar k gånger av n möjliga är då $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Läs Exempel 2.18!