Högskolan i Halmstad

Funktioner av stokastiska variabler

Vi har tidigare definierat *oberoende händelser*. Eftersom $X \leq x$ och $Y \leq y$ är händelser är det intuitivt vad som menas med *oberoende stokastiska variabler* men för tydlighets skull har vi följande definition.

Definition 1 *De stokastiska variablerna X och Y kallas* **oberoende** *(skrivet $X \perp Y$) om $P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$ för alla x och y i sina resp. värderum.*

Från denna defintion följer att $X_1, X_2, \ldots, X_n$ är oberoende om
$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n) = P(X_1 \leq x_1)P(X_2 \leq x_2) \cdots P(X_n \leq x_n)$
för alla $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Läs Exempel 5.5!

Exempel Vad är fördelningen av $\min(X, Y)$ då
$X \in R(0, 2)$, $Y \in R(1, 3)$ och $X \perp Y$?

Lösning: Låt $Z = \min(X, Y)$. Då är fördelnigsfunktionen för Z:
$P(Z \leq z) = P(\min(X, Y) \leq z)$.
Låt oss betrakta fallen $z \leq 0$, $0 < z \leq 1$, $1 < z \leq 2$ och $z > 2$ separat.

$z \leq 0$: $P(\min(X, Y) \leq z) = 0$ (eftersom "$X \geq 0$" och "$Y \geq 1$)

$0 < z \leq 1$: $P(\min(X, Y) \leq z) = P(X \leq z) = \frac{z}{2-0} = \frac{z}{2}$ (eftersom "$Y \geq 1$")

$1 \leq z < 2$:
$$\begin{aligned}
P(\min(X, Y) \leq z) &= \int_1^3 P(\min(X, Y) \leq z \,|\, Y = y) f_Y(y)\,dy = \\
&= \int_1^3 P(\min(X, y) \leq z) \tfrac{1}{3-1}\,dy = \tfrac{1}{2}\int_1^z P(\min(X, y) \leq z)\,dy + \\
&+ \tfrac{1}{2}\int_z^2 P(\min(X, y) \leq z)\,dy + \tfrac{1}{2}\int_2^3 P(\min(X, y) \leq z)\,dy = \\
&= \tfrac{1}{2}\int_1^z 1\,dy + \tfrac{1}{2}\int_z^2 P(X \leq z)\,dy + \tfrac{1}{2}\int_2^3 P(X \leq z)\,dy = \\
&= \tfrac{1}{2}(z-1) + \tfrac{1}{2}\int_z^2 \tfrac{z}{2-0}\,dy + \tfrac{1}{2}\int_2^3 \tfrac{z}{2-0}\,dy = \\
&= \tfrac{1}{2}(z-1) + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{z}{2}(2-z) + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{z}{2}(3-2) = -\tfrac{z^2}{4} + \tfrac{5z}{4} - \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

$z > 2$: $P(\min(X, Y) \leq z) = 1$ (eftersom $X \leq 2$)

Sammanlagt har vi att
$$P(Z \leq z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ \frac{z}{2} & 0 < z \leq 1 \\ -\frac{z^2}{4} + \frac{5z}{4} - \frac{1}{2} & 1 < z \leq 2 \\ 1 & z > 2 \end{cases}$$
Täthetsfunktionen fås genom att derivera ovanstående på de resp. intervallen. □

Övning Härled fördelningen för $\min(X, Y)$ genom att istället resonera:
$P(\min(X, Y) \leq z) = P(\{X \leq z\} \cup \{Y \leq z\}) = 1 - P(\{X > z\} \cap \{Y > z\})$ och utnyttja att $X \perp Y$. Gör även motsvarande för $\max(X, Y)$.

Exempel Låt $X \in Exp(\lambda_1) \perp Y \in Exp(\lambda_2)$ och $Z = \min(X, Y)$.
Beräkna $E(Z)$ och $V(Z)$.

Lösning: Istället för att försöka beräkna väntevärde och varians direkt försöker vi först beräkna fördelningen för Z.

$$\begin{aligned}
F(z) &= P(Z \leq z) \\
&= P(\min(X,Y) \leq z) \\
&= 1 - P(\min(X,Y) > z) \\
&= 1 - P(X > z, Y > z) \\
&= 1 - P(X > z)P(Y > z) \\
&= 1 - (1 - P(X \leq z))(1 - P(Y \leq z)) \\
&= 1 - (1 - (1 - e^{-\lambda_1 z}))(1 - (1 - e^{-\lambda_2 z})) \\
&= 1 - e^{-\lambda_1 z} e^{-\lambda_2 z} \\
&= 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) z}
\end{aligned}$$

dvs $Z \in Exp(\lambda_1 + \lambda_2)$ varmed $E(Z) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ och $V(Z) = \frac{1}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}$. $\square$

Exempel Låt $X \in Poi(\lambda_1) \perp Y \in Poi(\lambda_2)$. Vad är fördelningen av $X + Y$?

Lösning: Kom ihåg binomialsatsen: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ och att $p_X(x) = e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^x}{x!}$, $p_Y(y) = e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^y}{y!}$.

$$\begin{aligned}
P(X + Y = z) &= \sum_{x=0}^{\infty} P(X + Y = z, X = x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} \underbrace{P(Y = z - x)}_{=0 \text{ då } z-x<0 \text{ dvs då } x>z} \quad P(X = x) \\
&= \sum_{x=0}^{z} p_Y(z - x) p_X(x) \\
&= \sum_{x=0}^{z} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{z-x}}{(z-x)!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda_2} e^{-\lambda_1} \frac{1}{z!} \sum_{x=0}^{z} \frac{z!}{(z-x)!x!} \lambda_2^{z-x} \lambda_1^x \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{z!} \sum_{x=0}^{z} \binom{z}{x} \lambda_1^x \lambda_2^{z-x} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{z!} (\lambda_1 + \lambda_2)^z
\end{aligned}$$

dvs $X + Y \in Poi(\lambda_1 + \lambda_2)$. $\square$

Sats 5C Om $X_1, \ldots, X_n$ oberoende, $E(X_i) = \mu$, $V(X_i) = \sigma^2$ för alla $i = 1, \ldots, n$ och $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, så är $E(\bar{X}) = \mu$ och $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$.

Övning Bevisa Sats 5C genom att använda räknereglerna för väntevärde och varians.

Exempel Antag att Pelle spelar m gånger på ett lotteri, A, och n gånger på ett annat, B. Lotteriet A kostar 1 krona att spela och den förväntade återbäringen är 0.9 kronor per satsad krona med standardavvikelse 0.5. Vid lotteriet B satsar man 5 kronor och återbäringen är 4.1 kronor per satsad krona med standardavvikelse 1.5. Vad är förhållandet mellan väntevärdet och variansen av den totala återbäringen?

Lösning Låt

X_i	vara förlusten gång i vid spel på A
Z_i	återbäringen gång i vid spel på A
Y_j	vara förlusten gång j vid spel på B
W_j	återbäringen gång j vid spel på B

Då är

$$X_i = \text{Insats}_A - Z_i = 1 - Z_i \text{ och } Y_j = \text{Insats}_B - W_j = 5 - W_j$$

Eftersom $E(Z_i) = 0.9$ och $E(W_j) = 4.1$ så är

$$E(X_i) = E(1 - Z_i) = 1 - E(Z_i) = 0.1 \text{ och } E(Y_j) = E(5 - W_j) = 5 - E(W_j) = 0.9$$

Vidare är

$$V(X_i) = V(1-Z_i) = V(Z_i) = 0.5^2 = 0.25 \text{ och } V(Y_j) = V(5-W_j) = V(W_j) = 1.5^2 = 2.25$$

så totalt fås med den totala återbäringen $T = X_1 + \ldots + X_m + Y_1 + \ldots + Y_n$ att

$$E(T) = \textstyle\sum_{i=1}^m E(X_i) + \sum_{j=1}^n E(Y_j) = 0.1m + 0.9n$$

och att

$$V(T) = \textstyle\sum_{i=1}^m V(X_i) + \sum_{j=1}^n V(Y_j) = 0.25m + 2.25n$$

varmed förhålandet är

$$\frac{E(T)}{V(T)} = \frac{0.1m + 0.9n}{0.25m + 2.25n} = \frac{0.1}{0.25} \cdot \frac{m + 9n}{m + 9n} = 0.4$$

$\square$