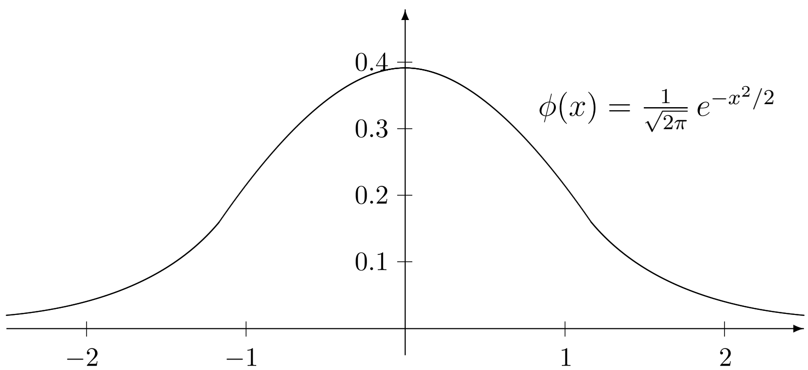
Högskolan i Halmstad

# Normalfördelningen

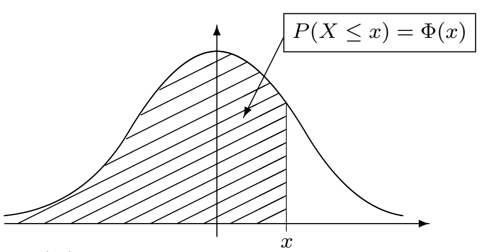
Av olika anledningar som vi ska se så småningom kan detta sägas vara den viktigaste fördelningen. Presentationen sker i två steg: först ett enkelt specialfall, sedan den generella varianten som dock behandlas genom att reduktion till specialfallet!

### Standard normalfördelning

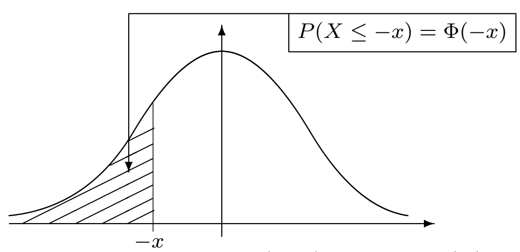
Om en variabel är *standard* normalfördelad betecknas detta $X \in N(0,1)$, dvs detta är en normalfördelad variabel med $\mu = 0$ och $\sigma^2 = 1$. Täthetsfunktionen för en sådan variabel har den speciella beteckningen $\phi(x)$ och fördelningsfunktionen betecknas $\Phi(x)$.



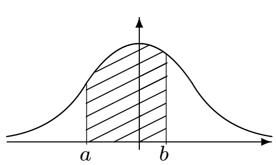

**Symmetrin:** $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$.

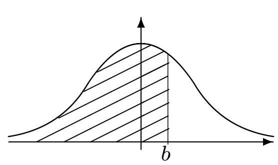


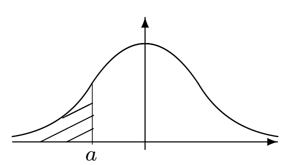

$\Phi(x)$ listade i tabell för $x > 0$




P.g.a. symmetrin är $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$P(a \le X \le b) =$ 

$=$ 

$-$ 


$= \Phi(b) - \Phi(a)$

**Exempel** Antag att $Y \in N(0,1)$. Vad är då

(a) $P(Y < 1.2)$?

(b) $P(-1 \leq Y \leq 0.6)$?

(c) $y$ om $P(Y > y) = 0.8$?

**Lösning**

(a) $P(Y < 1.2) = \Phi(1.2) = 0.8849$ (från tabell!).

(b) $P(-1 \leq Y \leq 0.6) = P(Y \leq 0.6) - P(Y \leq -1) = \Phi(0.6) - \Phi(-1) =$
$= \Phi(0.6) - (1 - \Phi(1)) = \Phi(0.6) - 1 + \Phi(1) = 0.7257 - 1 + 0.8413 = 0.567$

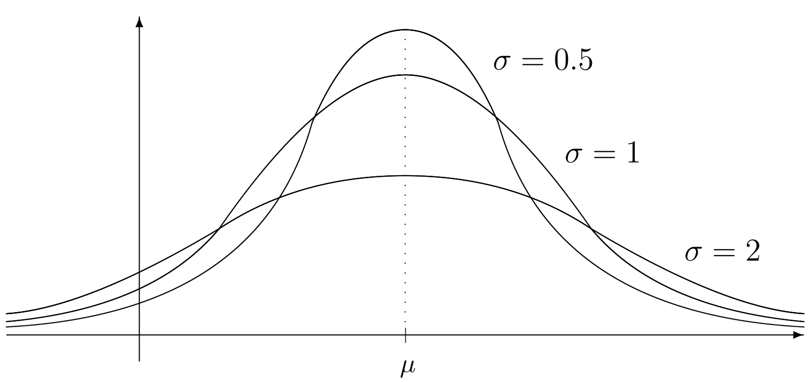
(c) $P(Y > y) = 0.8$ men $P(Y > y) = 1 - P(Y \leq y)$ varmed $\Phi(y) = P(Y \leq y) = 1 - 0.8 = 0.2$, dvs $0.2 = 1 - \Phi(-y)$, dvs $\Phi(-y) = 0.8$. Från tabellen får vi "baklänges" att detta svarar mot att $-y = 0.7881$ så $y = -0.7881$.

□

**Den generella normalfördelningen**

Att en variabel $X$ är (generellt) normalfördelad betecknas $X \in N(\mu, \sigma^2)$. Detta innebär att den har täthetsfunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R}$$




Den generella normalfördelningen är inte mycket svårare att hantera än standard normalfördelningen tack vare följande relation.

**Sats** Om $X \in N(\mu, \sigma^2)$, så $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \in N(0,1)$.

Parametern $\sigma$ är den s.k. *standardavvikelsen*, (detta är detsamma som att säga att $\sigma^2$ är variansen) och parametern $\mu$ är väntevärdet.

Därmed kallas det att *standardisera* då man beräknar en sannolikhet för en normalfördelad variabel $X$ med $\mu \neq 0$ och/eller $\sigma \neq 1$ genom att bilda $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$.

En konsekvens av Sats 5C (i förra avsnittet) är att eftersom normalfördelningen summor av normalfördelade variabler är normalfördelade, gäller t.ex. att

$$X_1, \ldots, X_n \text{ oberoende, } X_i \in N(\mu, \sigma^2), \; i = 1, \ldots, n \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \bar{X} \in N(\mu, \tfrac{\sigma^2}{n}) \quad \text{och} \quad \textstyle\sum_{i=1}^{n} X_i \in N(n\mu, n\,\sigma^2)$$

**Exempel** Livslängden hos en transistor i dagar är $X \in N(\mu, \sigma^2)$.

(a) Vad är sannolikheten att den håller i över 2 år om $\mu = 800$ och $\sigma^2 = 10\,000$?

(b) Vad måste $X$ ha för väntevärde om sannolikheten att transistorn ska hålla i minst 2 år ska vara 0.9?

**Lösning:**

(a) Låt oss anta att året har 365 dagar (eftersom det inte står något om skottår). Då är $P(\text{håller i 2 år}) = P(X > 2 \cdot 365) = 1 - P(X \le 730) = 1 - \Phi(\frac{730-800}{100}) =$ $= 1 - \Phi(-0.7) = \Phi(0.7) = 0.758$.

(b) $0.9 = P(\text{håller i två år}) = 1 - \Phi(\frac{730-\mu}{100}) = \Phi(-\frac{730-\mu}{100}) = \Phi(\frac{\mu-730}{100})$. I tabellen finner vi att $\Phi(x) = 0.9$ svarar mot $x = 1.2816$ varmed $\frac{\mu-730}{100} = 1.2816$ dvs $\mu = 1.2816 \cdot 100 + 730 = 858.16$.

□

**Exempel** Antag $X \in N(\mu, \sigma^2)$. Beräkna

(a) gränser, symmetriskt belägna i förhållande till väntevärdet, mellan vilka $X$ ligger med 99% sannolikhet om $\mu = -0.5$ och $\sigma = 0.1$.

(b) $P(1 + 2X^2 > 2)$ om $\mu = \sigma = \frac{1}{2}$.

(c) $\mu$ om $P(X < 0.99) = 0.99$ och $\sigma = \mu$.

**Lösning:**

(a) Antag att gränserna är $\mu - a$ och $\mu + a$ där $a > 0$. Då är $0.99 = P(\mu - a \le X \le \mu + a) = P(X \le -0.5 + a) - P(X \le -0.5 - a) =$ $= \Phi(\frac{-0.5+a+0.5}{0.1}) - \Phi(\frac{-0.5-a+0.5}{0.1}) = \Phi(\frac{a}{0.1}) - \Phi(-\frac{a}{0.1}) = \Phi(\frac{a}{0.1}) - (1 - \Phi(\frac{a}{0.1})) =$ $= 2\Phi(10a) - 1$. Detta innebär att $2\Phi(10a) = 1.99$ så $\Phi(10a) = 0.995$. Från tabell får vi därmed att $10a = 2.575$ dvs $a = 0.2575$ varmed intervallet är $\mu \pm a$: $(-0.5 - 0.2575\,,\ -0.5 + 0.2575) = (-0.7575\,,\ -0.2425)$.

(b)
$$
\begin{aligned}
P(1+2X^2>2) &= P(X^2>\tfrac{1}{2}) \\
&= 1-P\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \le X \le \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= 1-P\left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) \\
&= 1-\left(P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2-1\right) - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2-1\right)\right) \\
&= 1-\Phi(\sqrt{2}-1)+\Phi(-\sqrt{2}-1) \\
&= 1-\Phi(\sqrt{2}-1)+(1-\Phi(\sqrt{2}+1)) \\
&= 2-0.6591-0.9920 \\
&= 0.3489
\end{aligned}
$$

(c)
$$
\begin{aligned}
0.99 &= P(X<0.99) \\
&= \Phi\Big(\frac{0.99-\mu}{\mu}\Big) \\
&= \Phi\Big(\frac{0.99}{\mu}-1\Big) \\
&\Rightarrow \frac{0.99}{\mu}-1=2.33 \\
&\Rightarrow \mu=\frac{0.99}{2.33+1}=0.2973
\end{aligned}
$$

$\square$