Högskolan i Halmstad

Hypotestest (forts.)

Styrka

Man vill att chansen att förkasta nollhypotesen, då mothypotesen är sann, ska vara stor. Därför finns något som heter *styrka*.

Definition 1 *Vid ett hypotestest kallas sannolikheten att förkasta nollhypotesen då mothypotesen är sann för testets* **styrka** *som betecknas* β.

Exempel Antag att vi vill göra ett test av $H_0 : \mu = 0$ mot $H_1 : \mu > 0$ på signifikansnivå 5% då vi vet att $\sigma = 1$. Hur kan vi med ett stickprov med 10 observationer (dock innan vi observerat stickprovet) beräkna testets styrka?

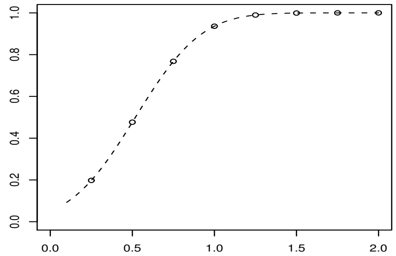
Lösning: Styrkan är inte ett konstant värde tal utan en funktion av väntevärdet under H_1, $\beta = \beta(\mu)$.

I detta fall är $\mu = 0$ under nollhypotesen och $\mu = 1, 2, 3, \ldots$ under mothypotesen så om inget speciellt värde av μ angivits är det lämpligast att ge ett stycke av styrkefunktionen. Låt oss kalla väntevärdet under nollhypotesen μ_0 (som vi gjort innan) och det "sanna" väntevärdet μ. Vi får då att

$$\begin{aligned}
\beta &= P(\text{förkasta } H_0 | H_1) \\
&= P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \lambda_\alpha \,\middle|\, H_1\right) \\
&= 1 - P\left(\bar{X} \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\lambda_\alpha + \mu_0 \,\middle|\, H_1\right) \\
&= 1 - P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\lambda_\alpha + \mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \,\middle|\, H_1\right) \\
&= 1 - P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \lambda_\alpha + \frac{(\mu_0 - \mu)\sqrt{n}}{\sigma} \,\middle|\, H_1\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\lambda_\alpha + \frac{(\mu_0 - \mu)\sqrt{n}}{\sigma}\right)
\end{aligned}$$

Detta gäller i allmänhet för denna typ av test. I detta fall med $\mu_0 = 0$, $\sigma = 1$, $\lambda_{0.05} = 1.64$ och $n = 10$ får vi att $\beta = 1 - \Phi(1.64 + \frac{(0-\mu)\sqrt{10}}{1}) = 1 - \Phi(1.64 - 3.1623\mu) =$ $= \Phi(3.1623\mu - 1.64)$ som vi kan beräkna för några värden $\mu > 0$.

μ	β
0.25	0.198
0.5	0.477
0.75	0.768
1	0.936
1.25	0.99
1.5	0.999
1.75	1
2	1



□

Exempel (Förlossningsexemplet) Påståendet var att $X \in N(14, 1)$. Vi visade i (a)-uppgiften att $\mu > 14$ på signifikansnivå 0.05 med ett stickprov av storlek $n = 5$. Vad var styrkan av testet om $\mu = 15.5$?

Lösning: Enligt räkningarna på föregående sida har vi att

$$\begin{aligned}
\beta &= 1 - \Phi\left(\lambda_\alpha + \frac{(\mu_0 - \mu)\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(1.64 + \frac{(14 - \mu)\sqrt{5}}{1}\right) \\
&= \Phi(1.5\sqrt{5} - 1.64) \\
&= \Phi(1.7141) \\
&= 0.9564
\end{aligned}$$

□

Test med binomialfördelning

Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara ett stickprov på X där $P(X = 0) = 1 - p$ och $P(X = 1) = p$.

Antag att vi vill testa $H_0 : p = p_0$ mot A: $H_1 : p < p_0$, B: $H_1 : p > p_0$, respektive C: $H_1 : p \neq p_0$ på signifikansnivå α.

Vi bildar statistikan $U = \sum_{i=1}^{n} X_i$ som är fördelad $Bin(n, p_0)$ under nollhypotesen. För att avgöra om vi kan förkasta nollhypotesen eller ej beräknar vi nu p-värdet α_0 enligt följande:
A: $\alpha_0 = P(U < u|H_0)$, B: $\alpha_0 = P(U > u|H_0)$ respektive
C: $\alpha_0 = \begin{cases} 2P(U < u|H_0) & \text{om } u < np_0 \\ 2P(U > u|H_0) & \text{om } u > np_0 \end{cases}$

Testregeln är: Förkasta H_0 om $\alpha_0 < \alpha$.

Exempel I en fabrik finns 250 maskiner varav 21 är sönder. Vid köpet av maskinerna för ett år sedan garanterade tillverkaren att för varje maskin var risken mindre än 5% att den skulle gå sönder inom ett år, annars skulle ett försäkringsbelopp utbetalas. Kan man med 1% sighifikansivå säkerställa att man har rätt till försäkringspengarna?

Lösning: Antag att sannolikheten att en maskin går sönder inom ett år är p. Låt X_i vara en stokastisk variabel som är 0 om maskin nummer i fungerar och 1 om den är sönder, $i = 1, 2, \ldots, 250$. Då är $P(X_i = 0) = 1 - p$ och $P(X_i = 1) = p$. Vidare är antalet maskiner som går sönder inom ett år $\sum_{i=1}^{250} X_i \in Bin(250, p) \approx N(250p, \sqrt{250p(1-p)})$. För att eventuellt kunna bevisa att sannolikheten att en maskin går sönder är strörre än 0.05 måste vi testa hypotesen

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.05 \\ H_1 : p > 0.05 \end{cases}.$$

Vi har observerat $u = 21$ och ska därmed beräkna p-värdet och får då (med halvkorrektion) att

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= P(U > 21|H_0) \\
&= 1 - P(U \leq 21|p = 0.05) \\
&\approx 1 - \Phi\left(\frac{21 + 0.5 - 250 \cdot 0.05}{\sqrt{250 \cdot 0.05(1 - 0.05)}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{21.5 - 12.5}{\sqrt{11.875}}\right) \\
&= 1 - \Phi(2.6117) \\
&= 1 - 0.9955 \\
&= 0.0045
\end{aligned}$$

Eftersom $\alpha_0 = 0.0045 < 0.01 = \alpha$ kan H_0 förkastas på signifikansnivå 0.01, dvs ja, man har rätt till försäkringsbeloppet. $\square$