Högskolan i Halmstad

Inlämningsuppgift 3

Kursansvarig: Eric Järpe.

Till uppgifterna skall *fullständiga lösningar* lämnas.
Lösningarna skall vara *utförligt* redovisade!
Helt korrekt löst inlämningsuppgift ger 1 bonuspoäng till tentan.
Senaste inlämningsdag, se kurshemsidan.

Namn: ________________________ Adress: ____________________________________

1. Antag att $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är vektorer i $\mathbb{R}^n$:

$$\boldsymbol{u} = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, 1\right) \quad \text{och} \quad \boldsymbol{v} = \left(\frac{2}{n^2}, \frac{3}{n^2}, \frac{4}{n^2}, \ldots, \frac{n+1}{n^2}\right).$$

Hur många dimensioner, n, <u>måste</u> man räkna med för att skalärprodukten, $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$, ska vara mindre än 123/333?

Tips: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Lösning:

2. För vilka värden α är matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & \alpha^2 \\ \alpha & 2 & \alpha^{41} \end{bmatrix}$$

inverterbar?

Lösning:

3. Låt $\mathsf{M} = \begin{bmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{bmatrix}$ där $a, b \in (0, 1)$.

   (a) Beräkna egenvärden och egenvektorer till matrisen M.
   (Tips: Beräkna även $(2 - a - b)^2$.)

   (b) Beräkna $\mathsf{M}^7 \boldsymbol{v}$, där $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}^T$ och $a = \frac{5}{6}$, $b = \frac{2}{3}$.

Lösning:

4. Låt A vara följande symmetriska 2×2-matris:

$$\mathsf{A} \;=\; \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \qquad \text{där } a > 0 \text{ och } b > 0.$$

(a) Visa att

$$\det(\mathsf{A}^{2n}) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} a^{4(n-k)} b^{4k} \;-\; \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} a^{4(n-k)+2} b^{4k-2}$$

för alla posiva heltal n.

(b) Visa att

$$2\mathsf{A}^n \;=\; \begin{bmatrix} (a+b)^n + (a-b)^n & (a+b)^n - (a-b)^n \\ (a+b)^n - (a-b)^n & (a+b)^n + (a-b)^n \end{bmatrix}$$

för alla positiva jämna tal n.

Lösning: