Tentamen i Linjär Algebra, 7.5p

Distanskurs
21 augusti, 2010 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe, telefon 0702-822 844, 035-16 76 53.

1. Antag att $F : K \to M$ och $G : M \to N$ är linjära avbildningar med avbildningsmatriser A respektive B. Bevisa att avbildningen $G \circ F$ har avbildningsmatrisen AB. (4p)

   Lösning: (Se beviset av Sats 4, s. 180–181 i *Linjär algebra* av Sparr.) □

2. För vilka värden på a har ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + y - z &= 1 \\ x - ay + z &= 1 \\ x - y + z &= a \end{cases}$$

   entydig lösning och vad är den? (3p)

   Lösning: Numrera ekvationerna (1), (2) och (3). Då ger (2) − (3): $-ay + y = 1 - a$. Om nu $a \neq 1$ är därmed $y = 1$ och följaktligen (1) + (3): $(a+1)x = 1 + a \Rightarrow x = 1$ om $a \neq -1$ och (3): $1 - 1 + z = a \Rightarrow z = a$. Detta ger den entydiga lösningen $(1, 1, a)$.
   Om $a = 1$ fås lösningsmängden $\{(1, t, t) : t \in \mathbb{R}\}$ och om $a = -1$ fås $\{(t, 1, -t) : t \in \mathbb{R}\}$ men ingen av dessa är entydiga lösningar. Därmed finns endtydig lösning om och endast om $|a| \neq 1$ och den är $(x, y, z) = (1, 1, a)$. □

3. Bilda en ON-bas $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ där $\boldsymbol{e}_1$ är parallell med vektorn $(1, 1, 1)$ och $\boldsymbol{e}_2$ ligger i xy-planet. (3p)

   Lösning: $|(1,1,1)| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$ så $\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Om $\boldsymbol{e}_2$ ska ligga i xy-planet måste den ha z-koordinat 0, dvs $\boldsymbol{e}_2 = (a, b, 0)$ där värdet på a och b väljs så att $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0$ och $|\boldsymbol{e}_2| = 1$. Vi får $0 = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \cdot (a,b,0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(a+b)$, dvs $b = -a$, dvs basvektorn måste vara på formen $(a, -a, 0)$. Normering ger nu $1 = |(a, -a, 0)| = \sqrt{a^2 + a^2 + 0} = a\sqrt{2} \Rightarrow \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$. Den tredje basvektorn kan beräknas som vektorprodukten: $\sqrt{2}\sqrt{3}\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (1, 1, -2)$ så med normering får vi $\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$. Naturligtvis hade det gått lika bra med motsvarande negativa basvektorer eftersom det inte angivits något om orienteringen. □

4. Antag att A och B är kvadratiska matriser som satisfierar sambandet $AB = -BA$. Utveckla uttrycket $(A+B)^2$ och förenkla det så långt som möjligt. (2p)

Lösning: För vanliga reella tal a och b gäller att $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. Matriser är dock inte kommutativa, dvs $AB \neq BA$. I detta fall är $AB = -BA$ (varmed matriserna kallas *anti-kommutaviva*) och därmed är $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = AA+AB+BA+BB = A^2 + AB - AB + B^2 = A^2 + B^2$. $\square$

5. En bordsyta ligger i planet $x + y + z = 1$. Ovanför bordet går spindeln Charlotte på en tråd längs linjen $2x = 3y = z$. I punkten $(-1, -3, 5)$ på bordet ligger en sockerbit och på den sitter flugan Edgar. Hur lång tråd måste Charlotte spinna, vinkelrätt mot bordsytan, för att komma ned och äta upp Edgar? (3p)

Lösning: Normal till planet: $(1, 1, 1)$. Från en punkt $(3t, 2t, 6t)$ på linjen går Charlotte i normalriktningen $(1, 1, 1)$ tills hon kommer fram till Edgar i punkten $(-1, -3, 5)$. Därmed måste sambandet $(3t, 2t, 6t) + a(1, 1, 1) = (-1, -3, 5)$ gälla. Detta är ett överbestämt ekvationssystem och vi får att $3t + a = -1$ och $2t + a = -3$ varmed $a = -1 - 3t = -3 - 2t$ vilket innebär att $t = 2$ och $a = -7$. Med den tredje ekvationen kan vi nu kolla om systemet saknar lösning eller om den satisfierar de två andra: $6 \cdot 2 + (-7) = 5$ ok! Därmed är längden som Charlotte kryper vinkelrätt mot bordsytan: $|(-7)(1, 1, 1)| = 7\sqrt{3}$. $\square$

6. En tetraeder har hörn i punkterna $(2, 0, 0)$, $(-1, \sqrt{3}, 0)$, $(-1, -\sqrt{3}, 0)$ och $(0, 0, 2\sqrt{2})$. Beräkna dess mantelarea. (4p)

Lösning: Låt oss beräkna ytan av en av sidorna och multiplicera med 4 för att få den totala omgivande ytan. Att beräkna ytan av en av sidorna kan göras på åtminstone 2 sätt.

Alt I Om vi kan bilda två vektorer som svara mot två av tetraederns intilliggande kanter, så kan arean av den triangel som har dessa kanter begränsar beräknas som halva beloppet av vektorprodukten av dessa vektorer. En vektor fås t ex som $\boldsymbol{u} = (2, 0, 0) - (0, 0, 2\sqrt{2}) = (2, 0, -2\sqrt{2})$ och en annan som $\boldsymbol{v} = (2, 0, 0) - (-1, -\sqrt{3}, 0) = (3, \sqrt{3}, 0)$. Halva beloppet av vektorprodukten blir $\frac{1}{2}|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = \frac{1}{2}\left|\left(\begin{vmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & -2\sqrt{2} \\ 3 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -\sqrt{3} \end{vmatrix}\right)\right| =$
$= \frac{1}{2}|(-2\sqrt{6}, -6\sqrt{2}, -2\sqrt{3})| = \frac{1}{2}\sqrt{4 \cdot 6 + 36 \cdot 2 + 4 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$.

Alt II Det andra sättet är helt enkelt att använda den gamla hederliga formeln "basen×höjden/2". Basen är ju längden av en kant, t ex avståndet mellan $(-1, \sqrt{3}, 0)$ och $(-1, -\sqrt{3}, 0)$ vilket ju är $2\sqrt{3}$. Eftersom trianglarna är liksidiga och "bottentriangeln" är symmetrisk kring x-axeln fås höjden som avståndet mellan x-kooridinaterna $x = -1$ och $x = 2$ vilket är 3. Alltså får vi att $\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3}$.

Därmed är den totala mantelarean $4 \cdot 3\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$. $\square$

7. Gentlemannatjuven Steve Sleve ska stjäla drottningens juvelsmycke. Det bevakas dock av två laserstrålar längs linjerna $\ell_1 : 1 + x = 2 - y = 3z$ och $\ell_2 : -x = 2y = 3 + z$ där enheten är meter. Steve använder sin radiostyrda punktformade svävare för att knycka juvelen men det kan inte hjälpas att den måste färdas mellan laserstrålarna. Vad är det minsta avstånd som Steve kan vara säker på att kunna hålla till laserstrålarna? (4p)

Lösning: Låt oss börja med att anta att väggar, tak, golv och juvelens placering inte innebär att svävaren måste flyga närmare laserlinjerna av den anledningen. Eftersom svävaren måste flyga mellan laserstrålarna är då minsta avståndet halva avståndet mellan linjerna. På parameterform blir linjerna $\ell_1 : (x, y, z) = (-1 + 3s, 2 - 3s, s)$ och $\ell_2 : (x, y, z) = (-2t, t, -3+2t)$. Från detta inses att $\boldsymbol{r}_1 = (3, -3, 1)$ respektive $\boldsymbol{r}_2 = (-2, 1, 2)$ så ortogonal mot dessa är $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = \left(\begin{vmatrix} 0 & -3\sqrt{1} \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-7, -8, -3)$. Minsta sträckan mellan ℓ_1 och ℓ_2 fås genom att gå från den punkt på den ena linjen så att man via $\boldsymbol{u}$ kommer till den andra linjen. Avståndet mellan linjerna är därmed längden av den sträcka man tillryggalagt längs $\boldsymbol{u}$. Vi får ekvationssystemet $\begin{cases} -1 + 3s + 7u &= -2t \\ 2 - 3s + 8u &= t \\ s + 3u &= -3 + 2t \end{cases}$ vilket reduceras till $\begin{cases} s - 2t + 3u &= -3 \\ t + 15u &= -1 \\ 122u &= -12 \end{cases}$ varmed $u = -\frac{6}{61}$ vilket innebär att avståndet mellan linjerna är $|\frac{6}{61}(7, 8, 3)| = 6\sqrt{\frac{2}{61}}$. Därmed är det minsta avståndet som svävaren kan hålla till linjerna halva detta avstånd, nämligen $3\sqrt{\frac{2}{61}}$ (≈ 0.54) meter. $\square$

8. Låt

$$M = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 14 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Beräkna (a) egenvärdena för M (3p) (b) M^{12} (4p)

Lösning:

(a) $0 = \det(M-\lambda I) = (\frac{1}{3})^3 \begin{vmatrix} 4-3\lambda & 14 & 1 \\ 0 & -3-3\lambda & 0 \\ 2 & 4 & 5-3\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{27}(3+3\lambda) \begin{vmatrix} 4-3\lambda & 1 \\ 2 & 5-3\lambda \end{vmatrix} =$
$= \frac{1}{9}(1+\lambda)\Big((4-3\lambda)(5-3\lambda) - 1\cdot 2\Big) = (1+\lambda)(2-3\lambda+\lambda^2)$. Denna ekvation har en rot $\lambda_1 = -1$. Då återstår att lösa $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ som har rötterna $\lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = 2$. Detta är egenvärdena för M.

(b) M^{12} beräknas enklast genom att vi först diagonaliserar M: $M = SDS^{-1}$ där D är en diagonalmatris med egenvärdena $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ till M i diagonalen (och nollor i övrigt) och S är en matris med de tre egenvektorerna som kolonner och S^{-1} dess invers. Då är, enligt Lemma 1 s. 240 i kurslitteraturen, $M^{12} = SD_{12}S^{-1}$ där D_{12} är en diagonalmatris med diagonalen $(\lambda_1^{12}, \lambda_2^{12}, \lambda_3^{12})$ och S matrisen med egenvektorerna till M som förut.

Låt oss därför börja med att beräkna egenvektorerna $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$. Vi får för $\lambda_1 = -1$: $M\boldsymbol{u} = -1\cdot\boldsymbol{u} \Rightarrow \begin{cases} 4u_1 + 14u_2 + u_3 &= -3u_1 \\ -3u_2 &= -3u_2 \\ 2u_1 + 4u_2 + 5u_3 &= -3u_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7u_1 + 14u_2 + u_3 &= 0 \\ 2u_1 + 4u_2 + 8u_3 &= 0 \\ u_3 &= 0 \end{cases}$
$\Rightarrow u_1 = -2u_2, u_3 = 0$ varmed $\boldsymbol{u} = (-2, 1, 0)$ är en egenvektor som svarar mot λ_1. För $\lambda_2 = 1$ fås: $M\boldsymbol{v} = 1\cdot\boldsymbol{v} \Rightarrow \begin{cases} 4v_1 + 14v_2 + v_3 &= 3v_1 \\ -3v_2 &= 3v_2 \\ 2v_1 + 4v_2 + 5v_3 &= 3v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 + 14v_2 + v_3 &= 0 \\ v_2 &= 0 \\ 2v_1 + 4v_2 + 2v_3 &= 0 \end{cases}$
$\Rightarrow v_1 = -v_3, v_2 = 0$ så $\boldsymbol{v} = (1, 0, -1)$ är en egenvektor för λ_2. För $\lambda_3 = 2$ får vi $M\boldsymbol{w} = 2\cdot\boldsymbol{w} \Rightarrow \begin{cases} 4w_1 + 14w_2 + w_3 &= 6w_1 \\ -3w_2 &= 6w_2 \\ 2w_1 + 4w_2 + 5w_3 &= 6w_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2w_1 + 14w_2 + w_3 &= 0 \\ w_2 &= 0 \\ 2w_1 + 4w_2 - w_3 &= 0 \end{cases}$ varmed $\boldsymbol{w} = (1, 0, 2)$ är en egenvektor svarande mot λ_3. Därmed blir

$$S = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Invertering av denna ger att

$$S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

varmed $M^{12} = SD_{12}S^{-1} =$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{12} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{12} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1366 & 2730 & 1365 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2730 & 5460 & 2731 \end{bmatrix}$$

□