401. $\{X(t)\}$ normalprocess med vvf = 0 och kvf

$$r(\tau) = \begin{cases} 1-|\tau| & \text{då } |\tau| \le 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} V(X(t)) = r(0) = 1 \\ \text{normalprocess} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{alla } X(t) \in N(0,1)$$

varmed $P(X(t) > 2) = 1 - \Phi(2)$

$= 0.02275$

$X(t) + X(t+\frac{1}{2})$ lin. komb. av $\{X(t)\}$

så normalfördelad

$E(X(t) + X(t+\frac{1}{2})) = 0$

$$V(X(t) + X(t+\tfrac{1}{2})) = V(X(t)) + 2C(X(t), X(t+\tfrac{1}{2})) + V(X(t+\tfrac{1}{2}))$$

$$= 1 + 2\cdot(1 - \underbrace{|t+\tfrac{1}{2} - t|}_{\frac{1}{2}}) + 1$$

$$= 3$$

dvs $X(t) + X(t+1) \in N(0, \sqrt{3})$ så

$$P(X(t) + X(t+1) > 2) = 1 - P\left(\frac{X(t) + X(t+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} \le \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= 1 - \underbrace{\Phi(1.1547)}_{\approx 0.876\ [\text{halvvägs}(0.8749,\, 0.8770)]} = 0.124$$

$X(t) \perp X(t+1)$ så $V(X(t) + X(t+1)) = 1 + 1 = 2$

varmed $X(t) + X(t+1) \in N(0, \sqrt{2})$ så

$$P(X(t) + X(t+1) > 2) = 1 - \underbrace{\Phi\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)}_{\approx 0.921} = 0.079$$

402. $\{X(t)\}$ stationär normalprocess med kvf $r_X(\tau)$

$$Y(t) = X(t) - 0.4\, X(t-2)$$

$$r_Y(s,t) = C(X(s) - 0.4\,X(s-2),\; X(t) - 0.4\,X(t-2))$$

$$= C(X(s), X(t)) - 0.4\,C(X(s), X(t-2)) -$$
$$- 0.4\,C(X(s-2), X(t)) + 0.16\,C(X(s-2), X(t-2))$$

$$= r_X(t-s) - 0.4\,r_X(t-2-s) - 0.4\,r_X(t-(s-2)) +$$
$$+ 0.16\,r_X(t-2-(s-2))$$

$$= 1.16\,r_X(\tau) - 0.4\,(r_X(\tau-2) + r_X(\tau+2))$$

där $\tau = t - s$

$X(t)$ stationär $\Rightarrow$ $m_X(t) = m_X$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $m_Y(t) = m_X - 0.4\,m_X = 0.6\,m_X$

Alltså är $\{Y(t)\}$ svagt stationär.

Dessutom är $X(t)$ normalprocess så

$Y(t)$ (lin. komb. av $X(t)$) också normalpr.

och därmed {svagt stationär normalpr.}

$\Rightarrow$ strikt stationär.

$\{X(t)\}$ stationär normalpr. med

$m(t) = 0$

403, $r(\tau) = \dfrac{2+\tau^2}{1+\tau^2}$

$$P\left(\tfrac{1}{2}(X(1)+X(3)) + 1 < X(2)\right) =$$

$$= P\left(\frac{X(1)}{2} - X(2) + \frac{X(3)}{2} < -1\right)$$

Låt $Y = \dfrac{X(1)}{2} - X(2) + \dfrac{X(3)}{2}$

Då är $Y \in N(\mu, \sigma)$ (ty lin. komb. av komponenter ur normalprocess).

$\mu = E(Y) = 0$

$$\sigma^2 = V(Y)$$

$$= C\left(\frac{X(1)}{2} - X(2) + \frac{X(3)}{2}, \frac{X(1)}{2} - X(2) + \frac{X(3)}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}r(0) - \frac{1}{2}r(1) + \frac{1}{4}r(2) -$$

$$- \frac{1}{2}r(-1) + r(0) - \frac{1}{2}r(1) +$$

$$+ \frac{1}{4}r(-2) - \frac{1}{2}r(-1) + \frac{1}{4}r(0)$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{2+0}{1+0} + (-1-1)\frac{2+1}{1+1} + \frac{1}{2}\,\frac{2+4}{1+4}$$

$$= 3 - 3 + \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

varmed $P(Y < -1) = \Phi\left(\dfrac{-1-0}{\sqrt{3/5}}\right) =$

$$= 0.0985$$

$\lim_{\tau\to\infty} r(\tau) = 1 \Rightarrow$ långa pos. beroenden.

404 $\{Y(t)\}$ W-process med

$m(t) = 0, \quad r(s,t) = \min(s,t)$

d.v.s. standard W-process

Låt $Z(t) = \dfrac{Y(t) - Y(t/2)}{\sqrt{t}} \quad t > 0$

a) Fördelning för $Z(t)$

$$E(Z(t)) = E\left(\frac{Y(t) - Y(t/2)}{\sqrt{t}}\right) = 0$$

$$r_Z(s,t) = C\left(\frac{Y(s) - Y(s/2)}{\sqrt{s}}, \frac{Y(t) - Y(t/2)}{\sqrt{t}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{t}}\Big(C(Y(s), Y(t)) - C(Y(s), Y(t/2)) - C(Y(s/2), Y(t)) + C(Y(s/2), Y(t/2))\Big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{st}}\left(\min(s,t) - \min\left(s, \tfrac{t}{2}\right) - \min\left(\tfrac{s}{2}, t\right) + \min\left(\tfrac{s}{2}, \tfrac{t}{2}\right)\right)$$

$$= \begin{cases} s \le \frac{t}{2}: & \frac{1}{\sqrt{st}}\left(s - s - \frac{s}{2} + \frac{s}{2}\right) = 0 \\ \frac{t}{2} < s \le t: & \frac{1}{\sqrt{st}}\left(s - \frac{t}{2} - \frac{s}{2} + \frac{s}{2}\right) = \frac{s - \frac{t}{2}}{\sqrt{st}} \\ t < s \le 2t: & \frac{1}{\sqrt{st}}\left(t - \frac{t}{2} - \frac{s}{2} + \frac{t}{2}\right) = \frac{t - \frac{s}{2}}{\sqrt{st}} \\ s > 2t: & 0 \quad \text{psss innan} \end{cases}$$

speciellt $V(Z(t)) = r(t,t) = \frac{1}{2}$

så $Z(t) \in N(0, \sqrt{1/2})$

b) Ej svagt stat. ty hvf ej fkn av $s-t$.

405 $\{X_t\}$ hagelbrus med

intensitet λ

impulsfkn (strömpulsfkn) $g(x) = \begin{cases} kx & 0 < x < a \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

Bestäm vvf och kvf.

Från ex 12 i boken har vi Campbells formler

$$\begin{cases} m(t) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt \\ r(\tau) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,g(t-\tau)\,du \end{cases}$$

<u>vvf</u> $m(t) = \lambda \int_0^a kt\,dt = \lambda k\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^a = \lambda k \frac{a^2}{2}$

<u>kvf</u> $r(\tau) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\underbrace{g(t)}_{\substack{\neq 0 \text{ då} \\ t\in(0,a)}}\ \underbrace{g(t-\tau)}_{\substack{\neq 0 \text{ då} \\ t-\tau \in (0,a) \\ \text{dvs } t\in(\tau,a+\tau)}}}_{\substack{\neq 0 \text{ då } u\in(\tau,a) \quad 0<\tau<a \\ u\in(0,a+\tau) \quad -a<\tau<0}} dt$

$0 < \tau < a$:

$$= \lambda \int_\tau^a kt \cdot k(t-\tau)\,dt$$

$$= \lambda k^2 \int_\tau^a (t^2 - \tau t)\,dt$$

$$= \lambda k^2 \left[\frac{t^3}{3} - \tau\frac{t^2}{2}\right]_\tau^a$$

$$= \lambda k^2 \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^2\tau}{2} - \left(\frac{\tau^3}{3} - \frac{\tau^3}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{6}\lambda k^2 \left(2a^3 - 3a^2\tau + \tau^3\right)$$

$-a < \tau < 0$:

$$r(\tau) = \lambda \int_0^{a+\tau} kt \cdot k(t-\tau)\, dt$$

$$= \lambda k^2 \left[\frac{t^3}{3} - \tau \frac{t^2}{2} \right]$$

$$= \lambda k^2 \left(\frac{(a+\tau)^3}{3} - \tau \frac{(a+\tau)^2}{2} - 0 \right)$$

$$= \frac{1}{6} \lambda k^2 \left(2(a^3 + 3a^2\tau + 3a\tau^2 + \tau^3) - 3\tau(a^2 + 2a\tau + \tau^2) \right)$$

$$= \frac{1}{6} \lambda k^2 \left(\underline{2a^3} + \underline{6a^2\tau} + \underline{6a\tau^2} + 2\tau^3 - \underline{3a^2\tau} - \underline{6a\tau^2} - 3\tau^3 \right)$$

$$= \frac{1}{6} \lambda k^2 \left(2a^3 + 3a^2\tau - \tau^3 \right)$$

$$= \frac{1}{6} \lambda k^2 \left(2a^3 - 3a^2(-\tau) + (-\tau)^3 \right)$$

varmed $r(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{6} \lambda k^2 (2a^3 - 3a^2|\tau| + |\tau|^3) & \text{då } |\tau| < a \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

406) Totala strömmen vid t är

$$X(t) = \sum_k g(t-\tau_k)$$

$g(s)=0$ för $s<0$ dvs då $t<\tau_k$
så $X(t)$ endast beroende av emissioner före tiden t.

Från Ex 12 i boken har vi
Campbells formler

$$m(t) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt$$

$$r(\tau) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,g(t-\tau)\,du$$

vvf $m(t) = 10^4 \int_0^{\infty} 10^{-2} e^{-t}\,dt$

$$= 100 \int_0^{\infty} e^{-t}\,dt$$

$$= 100 \left[-e^{-t}\right]_0^{\infty}$$

$$= 100 \lim_{R \nearrow \infty} \left(-e^{-R} - (-e^{0})\right)$$

$$= 100\,(0+1) = 100$$

<u>kvf</u> $$r(\tau) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{g(t)}_{\substack{\neq 0 \text{ om} \\ t>0}} \underbrace{g(t-\tau)}_{\substack{\neq 0 \text{ om} \\ t>\tau}} dt$$

$$= 10^4 \int_{\max(0,\tau)}^{\infty} 10^{-2} e^{-t} \, 10^{-2} e^{-(t-\tau)} \, dt$$

$$= 1 \cdot e^{\tau} \int_{\max(0,\tau)}^{\infty} e^{-2t} \, dt$$

$$= e^{\tau} \left[-\frac{1}{2} e^{-2t} \right]_{\max(0,\tau)}^{\infty}$$

$$= e^{\tau} \lim_{R \nearrow \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-2R} - \left(-\frac{1}{2} e^{-2\max(0,\tau)} \right) \right)$$

$$= e^{\tau} \frac{1}{2} e^{-2\max(0,\tau)}$$

$$= \frac{1}{2} e^{\underbrace{\tau - 2\max(0,\tau)}_{\substack{\tau - 2\tau = -\tau \quad \text{om } \tau > 0 \\ \tau - 0 = \tau \quad \text{om } \tau < 0}}}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-|\tau|}$$

Eftersom $X(t) = \sum g(t - \tau_k)$
och $E(X(t)) = 100$ medan varje strömpuls
bidrar med $\leq 10^{-2}$ (intensiteten)
måste summan innehålla $\geq 10\,000$ termer
$\Rightarrow$ CGS: $X(t+1) - X(t) \in N(\mu, \sigma)$ där
$\mu = E(X(t+1) - X(t)) = 100 - 100 = 0$
$\sigma^2 = V(X(t+1) - X(t)) = C(X(t+1) - X(t), X(t+1) - X(t)) =$
$= r(0) - r(1) - r(-1) + r(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-|1|} - \frac{1}{2} e^{-|-1|} + \frac{1}{2} =$
$= 1 - e^{-1} \Rightarrow \sigma = \sqrt{1 - e^{-1}}$ så
$P(X(t+1) - X(t) > 2) = 1 - \Phi\left(\frac{2-0}{\sqrt{1-e^{-1}}}\right) = 1 - \Phi(2.516) =$
$= 0.006$

407. $r(s,t) = E(X_s X_t) - E(X_s)E(X_t)$

$$\{ E(X_t) = E(Z_t Z_{t-1}) = E(Z_t)E(Z_{t-1}) = 0 \}$$

$$= E(Z_s Z_{s-1} Z_t Z_{t-1})$$

$$= \begin{cases} E(Z_t^2 Z_{t-1}^2) & t = s \\ E(Z_{t+1} Z_t^2 Z_{t-1}) & t = s-1 \\ E(Z_{t-1}^2 Z_{t-2} Z_t & t = s+1 \\ E(Z_{t+2} Z_{t+1} Z_t Z_{t-1}) & t = s-2 \\ 0 & |t-s| \geq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \underbrace{E(Z_t^2)}_{1} \underbrace{E(Z_{t-1}^2)}_{1} & t = s \\ 0 & t \neq s \end{cases}$$

varmed X_s och X_t okorrelerade!

Är då $X_s \perp X_t$? Isåfall måste t. ex. $X_t^2 \perp X_{t+1}^2 \Rightarrow C(X_t^2, X_{t+1}^2) = 0$

<u>Men</u> $C(X_t^2, X_{t+1}^2) =$

$$= E(X_t^2 X_{t+1}^2) - E(X_t^2)E(X_{t+1}^2) =$$

$$= E(Z_{t+1}^2 Z_t^4 Z_{t-1}^2) - E(Z_t^2 Z_{t-1}^2) E(Z_{t+1}^2 Z_t^2)$$

$$= \underbrace{E(Z_{t+1}^2)}_{1} \underbrace{E(Z_t^4)}_{3} \underbrace{E(Z_{t-1}^2)}_{1} - \underbrace{E(Z_t^2)^2}_{=1^2=1} \underbrace{E(Z_{t-1}^2)}_{1} \underbrace{E(Z_{t+1}^2)}_{1}$$

$$= 2 > 0 \Rightarrow\Leftarrow$$

Alltså $X_s \perp X_t$ <u>ej</u> ober. ens då $s \neq t$