Tentamen i Linjär Algebra, 7.5p

Distanskurs
30 april, 2011 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe, telefon 0702-822 844, 035-16 76 53.

Till uppgifterna skall *fullständiga lösningar* lämnas. Lösningarna ska vara *utförligt* redovisade! Varje lösning ska börja överst på nytt papper. Endast en lösning per blad. Lösningar kommer finnas på internet: `http://dixon.hh.se/erja/teach` → `Matematik 1-30` → `Delkurs 2: Linjär algebra`.
Om inget annat påpekas får du förutsätta att koordinatsystemet är ortonormerat (ON).

1. Bevisa att om A är en inverterbar matris så är det $A \neq 0$. (3p)

2. För vilka värden på a har ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + y & = & 1 \\ x - y + z & = & a \\ 2x - 2y - az & = & 0 \end{cases}$$

entydig lösning, och vad är den? (4p)

3. En liksidig triangel är inskriven i det 3-dimensionella koordinatsystemet. Två av hörnen är $(1, 1, 1)$ och $(-1, 1, 0)$ och det tredje hörnet ligger på den positiva halvan av y-axeln. Bestäm ekvationen för det plan som triangeln spänner. (3p)

4. Låt π vara planet $x + 3y - z = 2$ och P koordinattrippeln $(a, 2, -1)$. Beräkna
   (a) (minsta) avståndet mellan punkten P och π om $a = 3$. (3p)
   (b) de värden på a som gör att längden av $\boldsymbol{u}$ blir $\sqrt{2}$, där $\boldsymbol{u}$ är den vektor i π som är ortogonal mot vektorn P. (4p)

5. Låt $\boldsymbol{e}'_1 = \frac{1}{7}(2, -6, 3)$, $\boldsymbol{e}'_2 = \frac{1}{7}(3, -2, -6)$ och $\boldsymbol{e}'_3 = \frac{1}{7}(6, 3, 2)$.
   (a) Visa att $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ är en ON-bas. (3p)
   (b) Vad blir koordinaterna för $\boldsymbol{u} = (1, 2, 3)$ med avseende på $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$? (3p)

6. Antag att A är en *skevsymmetrisk* matris av udda dimension, dvs $A^T = -A$ och $\dim A$ är udda. Visa att A är singulär. (4p)

7. Bestäm alla egenvärden till matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3p)

LYCKA TILL!