Tentamen i Linjär Algebra, 7.5p

Distanskurs
27 augusti, 2011 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe, telefon 0702-822 844, 035-16 76 53.

Till uppgifterna skall *fullständiga lösningar* lämnas. Lösningarna ska vara *utförligt* redovisade! Varje lösning ska börja överst på nytt papper. Endast en lösning per blad. Lösningar kommer finnas på internet: `http://dixon.hh.se/erja/teach` → `Matematik 1-30` → `Delkurs 2: Linjär algebra`.
Om inget annat påpekas får du förutsätta att koordinatsystemet är ortonormerat (ON).

1. Bevisa att $(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u_1} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{v}$ för alla tredimensionella vektorer $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ och $\boldsymbol{v}$. (4p)

2. Formulera och bevisa produktregeln för determinanter av matriser. (3p)

3. För vilka värden på $a \in \mathbb{R}$ har ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - 2y &= a \\ ax + 6y &= 3 - 2a \end{cases}$$

oändligt många lösningar och vilka är de? (3p)

4. Låt linjerna ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 vara givna av
$\ell_1 :\ x = 1 + y = 3z - 1$
$\ell_2 : 1 - 2x = 1 - 4y = -3z$
$\ell_3 : x + 1 = z$ och $y = a$.
   (a) Bestäm värdet på konstanten a så att ℓ_3 skär ℓ_2 och beräkna tyngdpunkten i den triangel som begränsas av ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. (4p)
   (b) Antag istället att $a = 5$. Vad är då kortaste avståndet mellan ℓ_1 och ℓ_3? (4p)
   (c) Antag att $a = 5$ och låt $\boldsymbol{r}_2$ och $\boldsymbol{r}_3$ vara riktningsvektorer för linjerna ℓ_2 respektive ℓ_3. Bestäm längden av ortogonalprojektionen av $(-2, 0, 5)$ på det plan som spänns av $\boldsymbol{r}_2$ och $\boldsymbol{r}_3$. (4p)

5. Beräkna produkten av egenevärdena till matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(4p)

6. Bevisa att alla triangulärmatriser är inverterbara om och endast om diagonalelementen är nollskilda, dvs visa att för alla matriser

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2n} \\ 0 & 0 & m_{33} & \cdots & m_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

gäller

$$M \text{ inverterbar} \iff m_{ii} \neq 0 \text{ för alla } i$$

(4p)

LYCKA TILL!