Lösningar till Tentamen i Linjär Algebra, 7.5p

Distanskurs
27 augusti, 2011 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe, telefon 0702-822 844, 035-16 76 53.

1. Bevisa att $(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{v}$ för alla tredimensionella vektorer $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ och $\boldsymbol{v}$. (4p)

   Lösning: (Se *Linjär algebra* av Sparr, s. 87–88.)

2. Formulera och bevisa produktregeln för determinanter av matriser. (3p)

   Lösning: (Se *Linjär algebra* av Sparr, s. 203.)

3. För vilka värden på $a \in \mathbb{R}$ har ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - 2y &= a \\ ax + 6y &= 3 - 2a \end{cases}$$

   oändligt många lösningar och vilka är de? (3p)

   Lösning: $\begin{cases} x - 2y &= a & (1) \\ ax + 6y &= 3 - 2a & (2) \end{cases}$
   $3 \cdot (1) + (2)$: $(3 + a)x = 3a + 3 - 2a = 3 + a$. Ekvationssystemet har oändligt många lösningar om $a = -3$ ty då blir $(1) \Leftrightarrow (2)$. Lösningarna är $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{2}(x + 3)\}$. □

4. Låt linjerna ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 vara givna av
   $\ell_1 :\ x = 1 + y = 3z - 1$
   $\ell_2 : 1 - 2x = 1 - 4y = -3z$
   $\ell_3 : x + 1 = z$ och $y = a$.
   (a) Bestäm värdet på konstanten a så att ℓ_3 skär ℓ_2 och beräkna tyngdpunkten i den triangel som begränsas av ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. (4p)
   (b) Antag istället att $a = 5$. Vad är då kortaste avståndet mellan ℓ_1 och ℓ_3? (4p)
   (c) Antag att $a = 5$ och låt $\boldsymbol{r}_2$ och $\boldsymbol{r}_3$ vara riktningsvektorer för linjerna ℓ_2 respektive ℓ_3. Bestäm längden av ortogonalprojektionen av $(-2, 0, 5)$ på det plan som spänns av $\boldsymbol{r}_2$ och $\boldsymbol{r}_3$. (4p)

Lösning:

(a) På parameterform blir $\ell_2 : (2t, t, \frac{1}{3}(4t-1))$ och $\ell_3 : (s, a, s+1)$. De skär varandra där x- och y-koordinaterna är lika, dvs där $s = 2t$ och $s + 1 = \frac{1}{3}(4t - 1)$. Tar man den första ekvationen minus den andra ledvis fås $2t - \frac{4}{3}t = -\frac{1}{3} - 1$, dvs $t = -2$ varmed $s = -4$. Eftersom $t = a$ är därmed $a = -2$. Triangelns hörn är i skärningarna mellan linjerna. Linjerna ℓ_2 och ℓ_3 skär i $(-4, -2, -3)$. För linjerna ℓ_1 och ℓ_3 får vi att $y = -2 \Rightarrow x = 1 + (-2) = -1$ och $3z - 1 = x = -1 \Rightarrow z = 0$. Alltså i $(-1, -2, 0)$. Skärningspunkt för linjerna ℓ_1 och ℓ_2 fås av att $x = 1 + y$ och $1 - 2x = 1 - 4y$ vilket efter ledvis addition, $2 \cdot (1) + (2)$, ger att $0 = 2(1 + y) + (-4) = 2 - 2y$, dvs att $y = 1$. Detta ger i sin tur att $x = 1 + y = 1 + 1 = 2$ och att $3z - 1 = x = 2 \Rightarrow z = \frac{1}{3}(2 + 1) = 1$. Skärningspunkten här är alltså $(2, 1, 1)$. Tyngdpunkten i triangeln blir nu $\frac{1}{3}((-1, -2, 0) + (2, 1, 1) + (-4, -2, -3)) = \frac{1}{3}(-3, -3, -2) = (-1, -1, -\frac{2}{3})$.

(b) Riktningsvektorer för ℓ_1 och ℓ_3 är $\ell_1 : (3t - 1, 3t - 2, t) \Rightarrow \boldsymbol{r}_1 = (3, 3, 1)$ och $\ell_3 : (s, 5, s + 1) \Rightarrow \boldsymbol{r}_3 = (1, 0, 1)$. Normal blir därmed $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3 = \left(\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (3, -2, -3)$. Punkter på linjerna är t ex $P_1 : (2, 1, 1)$ och $P_3 : (0, 5, 1)$ varmed sträckan mellan dem blir $\boldsymbol{u} = P_1 - P_3 = (2, -4, 0)$. Längden av projektionen av $\boldsymbol{u}$ på $\boldsymbol{n}$ blir därmed

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|^2} \cdot \boldsymbol{n} \right| &= \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} \\
&= \frac{|(2, -4, 0) \cdot (3, -2, -3)|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-3)^2}} \\
&= \frac{2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 - 0}{\sqrt{9 + 4 + 9}} \\
&= \frac{14}{\sqrt{22}}
\end{aligned}$$

(c) Riktningsvektorer för linjerna är:
$\boldsymbol{r}_1 = (3, 3, 1)$, $\ell_2 : (2t, t, \frac{1}{3}(4t - 1)) \Rightarrow \boldsymbol{r}_2 = (6, 3, 4)$ och $\boldsymbol{r}_3 = (1, 0, 1)$.
Planet som spänns av $\boldsymbol{r}_2$ och $\boldsymbol{r}_3$ är $\pi : (x, y, z) = (6, 3, 4)s + (1, 0, 1)t$, dvs $x = 6s + t$, $y = 3s$, $z = 4s + t$. På affin form blir detta $3x - 2y - 3z = 0$. Normal till planet blir $\boldsymbol{n} = (3, -2, -3)$. Projektionen $\boldsymbol{u}' = (u_1', u_2', u_3')$ av $(-2, 0, 5)$ på π ska satisfiera $(-2, 0, 5) = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{n}r = (6s + t, 3s, 4s + t) + (3, -2, -3)r$, $r \in \mathbb{R}$. Vi får därmed det linjära ekvationssystemet

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 6s + t + 3r & = & -2 \\ 3s \quad\;\; - 2r & = & 0 \\ 4s + t - 3r & = & 5 \end{array} \right.$$

som efter traditionell Gauss-elimiation ger $s = -\frac{14}{22}$, $t = \frac{103}{22}$, $r = -\frac{21}{22}$. Detta innebär att projektionen av $(-2, 0, 5)$ på π blir $(6 \cdot (-\frac{14}{22}) + \frac{103}{22}, 3 \cdot (-\frac{14}{22})) = (\frac{19}{22}, -\frac{42}{22}, \frac{47}{22})$, varmed längden av projektionen blir $|(\frac{19}{22}, -\frac{42}{22}, \frac{47}{22})| = \sqrt{\frac{19^2}{22^2} + \frac{42^2}{22^2} + \frac{47^2}{22^2}} = \frac{1}{22}\sqrt{361 + 1764 + 2209} = \frac{\sqrt{22 \cdot 197}}{22} = \sqrt{\frac{197}{22}}$. $\square$

5. Beräkna produkten av egenvärdena till matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(4p)

Lösning: Genom utveckling efter första kolumnen får vi:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 0 \\
&= (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) - ((2-\lambda) - 1) \\
&= (2-\lambda)^3 - (2-\lambda) - (2-\lambda) + 1 \\
&= 8 - 12\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 - 4 + 2\lambda - 1 \\
&= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 5 \quad = \quad 0
\end{aligned}$$

Ser att $\lambda = 1$ är en rot. Alltså kan vi bryta ut $(\lambda - 1)$ ur vänsterledet: $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 5 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 5\lambda - 5) = 0$ vilket ger andragradsekvationen $\lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0$ med lösningarna $\lambda = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 5} = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{5})$. Därmed är produkten $\frac{1}{\cdot}12(5 + \sqrt{5}) \cdot \frac{1}{2}(5 - \sqrt{5}) = \frac{1}{4}(25 - 5) = 5$. $\square$

6. Bevisa att alla triangulärmatriser är inverterbara om och endast om diagonalelementen är nollskilda, dvs visa att för alla matriser

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2n} \\ 0 & 0 & m_{33} & \cdots & m_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

gäller

$$M \text{ inverterbar} \quad \Longleftrightarrow \quad m_{ii} \neq 0 \text{ för alla } i$$

(4p)

Lösning: M inverterbar $\Leftrightarrow$ $\det M \neq 0$. I detta fall fås genom successiv utveckling efter första kolonnen att $\det M = m_{11} \cdot \begin{vmatrix} m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2n} \\ 0 & m_{33} & \cdots & m_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_{nn} \end{vmatrix} = m_{11} \cdot m_{22} \cdot \begin{vmatrix} m_{33} & \cdots & m_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & m_{nn} \end{vmatrix} = \ldots = m_{11} \cdot m_{22} \cdots m_{n-2,n-2} \cdot \begin{vmatrix} m_{n-1,n-1} & m_{n-1,n} \\ 0 & m_{nn} \end{vmatrix} = m_{11} \cdot m_{22} \cdots m_{nn} \neq 0$ vilket är sant omm $m_{ii} \neq 0$ för alla $i = 1, 2, \ldots, n$. $\square$