Lösningsförslag Flervariabelanalys, 2011-08-13.

1. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $y\, e^{-x^2} \sin z \; - \; \dfrac{\sqrt{3}}{2} \; = \; 0$
   i punkten $(0, 1, \frac{\pi}{3})$. *(2p)*

   Svar:
   Bestämmer först gradienten i den givna punkten:

   $$\nabla\left(y\, e^{-x^2} \sin z \; - \; \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)_{(0,1,\frac{\pi}{3})} \; = \; (-2\, x\, ye^{-x^2} \; \sin z, e^{-x^2} \sin z, ye^{-x^2} \cos z)_{(0,1,\frac{\pi}{3})} \; = \; (0, \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2}).$$

   En ekvation för tangentplanet är då:

   $$0 \cdot (x-1) + \tfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot (y-1) + \tfrac{1}{2} \cdot (z - \tfrac{\pi}{3}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{3}y + z = \sqrt{3} + \tfrac{\pi}{3}.$$

2. Vi har givet funktionen $f(x, y, z) = 2x^2y + y^2 - z^4$.
   I vilken riktning *avtar* funktionen snabbast i punkten $(1, -2, -1)$? *(2p)*

   Svar:
   Funktionen avtar snabbast i en riktning längs (parallelt med) vektorn $-\nabla f$. I den givna punkten:

   $$-\nabla f(1, -2, -1) \; = \; -(4xy, 2x^2 + 2y, -4z^3)_{(1,-2,-1)} \; = \; (8, 2, -4) = 2\,(4, 1, -2).$$

   Funtionen avtar alltså snabbast i riktningen $(4, 1, -2)$.

3. Bestäm följande gränsvärde eller visa att det inte existerar
   $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1 + x^2 + y^2 - x^2y)}{2x^2 + 2y^2}$. *(2p)*

   Svar:
   Använder planpolära koordinater:

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1 + x^2 + y^2 - x^2y)}{2x^2 + 2y^2} \; = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1 + x^2 + y^2 - x^2y)}{x^2 + y^2 - x^2y} \cdot \frac{x^2 + y^2 - x^2y}{2x^2 + 2y^2} \; =$$

   $$\lim_{u\to 0} \frac{\ln(1 + u)}{u} \cdot \lim_{r\to 0} \frac{r^2 - r^3 \; \cos^2\theta \; \sin\theta}{2\, r^2} \; = \; \frac{1}{2} \cdot \lim_{r\to 0} \Big(1 - r \; \cos^2\theta \; \sin\theta\Big) \; = \; \frac{1}{2}.$$

4. Bestäm alla *lokala* extremvärden för funktionen $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. *(3p)*

Svar:
Söker stationära punkter:

$$\begin{array}{rcl} f_x &=& 0 \\ f_y &=& 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} 3x^2 - 3y &=& 0 \\ 3y^2 - 3x &=& 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} y &=& x^2 \\ x^4 - x &=& 0 \end{array} \Leftrightarrow$$

$y = x^2 \wedge \Big(x = 0 \vee x = 1\Big) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0) \vee (x,y) = (1,1)$.

$(0,0)$ är uppenbart en sadelpunkt (och ger alltså *inte* ett extremvärde). Vi tittar därför på punkten $(1,1)$ i vilken de partiella 2.derivatorna har värden:

$f_{xx}(1,1) = 6,\ f_{yy}(1,1) = 6,\ f_{xy}(1,1) = -3$. Det ger:

$$f(1+h, 1+k) \simeq f(1,1) + \frac{1}{2}\Big(6h^2 + 2\cdot(-3)hk + 6k^2\Big) = -1 + 3\Big(h^2 - hk + k^2\Big) =$$

$$-1 + 3(h - \frac{k}{2})^2 + \frac{9}{4}k^2 > -1 \quad \text{om} \quad (h,k) \neq (0,0).$$

Uttrycket ovan demonstrerar att vi har ett *lokalt* minimum för $(x,y) = (1,1)$.

5. Bestäm arean av den del av ytan $z = 1 - x^2 - y^2$ för vilken $z \geq 0$. *(3p)*

Svar:
Notera att den aktuella ytans projektion i xy - planet är given av
$z = 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$, vilket motiverar övergång till planpolära koordinater.
Arean bestäms därmed som:

$$\iint_S dS = \iint_{S_{xy}} \sqrt{1 + \Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2}\, dx\, dy = \iint_{S_{xy}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dx\, dy =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2}\, r dr\, d\theta = \frac{\pi}{4}\int_1^5 u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{\pi}{6}\Big[u^{\frac{3}{2}}\Big]_1^5 = \frac{\pi}{6}\Big(5\sqrt{5} - 1\Big).$$

6. Beräkna $\displaystyle\iint_D \frac{e^{-\frac{y}{x}}}{x^3 + x}\, dx\, dy$, där $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x,\ x \geq 1\}$. *(3p)*

Svar:

$$\iint_D \frac{e^{-\frac{y}{x}}}{x^3 + x}\, dx\, dy = \int_1^\infty \frac{1}{x^3 + x}\Big(\int_0^x e^{-\frac{y}{x}}\, dy\Big)\, dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^3 + x}\Big[(-x)e^{-\frac{y}{x}}\Big]_0^x\, dx =$$

$$\frac{e-1}{e}\int_1^\infty \frac{1}{x^2 + 1}\, dx = \frac{e-1}{e}\Big[\arctan x\Big]_1^\infty = \frac{\pi(e-1)}{4}.$$

7. (a) Bestäm den *allmänna* lösningen $f(x,y)$ till differentialekvationen

$$2\,\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 8x\ .$$

Ledning: Använd variabelbytet $u = x+2y\ ,\ v = x-2y\ .$ *(3p)*

Svar:
Det föreslagna variabelbytet ger:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 2\,\frac{\partial f}{\partial u} - 2\,\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Insatt i den ursprungliga ekvationen:

$$2\,\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 8x \Leftrightarrow\ 4\,\frac{\partial f}{\partial v} = 4u+4v\ \Leftrightarrow\ f = uv + \frac{1}{2}\,v^2 + g(u),$$

där g är en godtycklig deriverbar funktion av en variabel. Återsubstitution av de ursprungliga variablerna ger den allmänna lösningen

$$f(x,y) = (x+2y)(x-2y) + \frac{1}{2}(x-2y)^2 + g(x+2y) = \frac{3}{2}x^2 - 2y^2 - 2xy + g(x+2y).$$

(b) Bestäm den *speciella* lösning, för vilken $f(0,y) = 2y^2$. *(2p)*

Svar:
Insatt i den allmänna lösningen:
$f(0,y) = -2y^2 + g(2y) = 2y^2\ \Rightarrow\ g(2y) = (2y)^2\ \Rightarrow\ g(t) = t^2.$

Återinsatt ger det den speciella lösningen:

$$f(x,y) = \tfrac{3}{2}x^2 - 2y^2 - 2xy + (x+2y)^2 = \tfrac{5}{2}x^2 + 2y^2 + 2xy.$$

8. Bestäm det största och minsta värdet för $g(x,y) = xy - x^3y^2$

i området $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$. *(5p)*

Svar:
Bestäm först alla inre stationära punkter:

$$\begin{array}{rcl} g_x & = & 0 \\ g_y & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} y(1-3x^2y) & = & 0 \\ x(1-2x^2y) & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Big(y = 0\ \vee\ 3x^2y = 1\Big) \wedge \Big(x = 0\ \vee\ 2x^2y = 1\Big)\ \Rightarrow\ (x,y) = (0,0).$$

Detta är en randpunkt - alltså har vi inga inre stationära punkter. Sedan betraktar vi värden för g på randen av Δ.

1. $(x,y)=(x,0),\ 0\le x\le 1:\ \ g(x,0)=0.$

2. $(x,y)=(1,y),\ \ 0\le y\le 1:\ \ g(1,y)=y-y^2=h_1(y).$

Det ger: $\ h_1'(y)=1-2y=0\ \Rightarrow\ y=\frac{1}{2}.$

Alltså har vi de interessanta punkterna $\ (1,\frac{1}{2}),\ (1,1).$

3. $(x,y)=(x,1),\ 0\le x\le 1:\ \ g(x,1)=x-x^3=h_2(x).$

Det ger: $\ h_2'(x)=1-3x^2=0\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{\sqrt{3}}.$

Ytterligare interessanta punkter: $\ (0,1),\ (\frac{1}{\sqrt{3}},1).$

4. $(x,y)=(0,y),\ \ 0\le y\le 1:\ \ g(0,y)=0.$

Slutligen jämförs funktionsvärden i de interessanta punkterna/randområdena:

$g(x,0)=g(0,y)=0,\ \ g(1,\frac{1}{2})=\frac{1}{4},\ \ g(1,1)=0,\ \ g(\frac{1}{\sqrt{3}},1)=\frac{2}{3\sqrt{3}}.$

Slutsats: $\ g_{min}=0,\ \ g_{max}=\frac{2}{3\sqrt{3}}.$

9. Beräkna $\displaystyle\iiint_K (x^2+y^2)dxdydz$, där $K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x^2+y^2\le 1, x^2+y^2+z^2\le 2\}$. *(5p)*

Svar:
Vi ser först att $\ x^2+y^2+z^2\le 2\ \Leftrightarrow\ -\sqrt{2-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2}.$

Notera även att $2-x^2-y^2\ge 0\ $ eftersom $\ x^2+y^2\le 1.$

Integralen blir då:

$$\iiint_K (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz\ =\ \iint_{K_{xy}} (x^2+y^2)\left(\int_{-\sqrt{2-x^2-y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dz\right)dx\,dy\ =$$

$$2\iint_{K_{xy}} (x^2+y^2)\,\sqrt{2-x^2-y^2}\,dx\,dy\ =\ 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\,\sqrt{2-r^2}\,r\,dr\,d\theta\ =$$

(variabelbyte $\ u=2-r^2\ \Rightarrow\ r\,dr\ =\ -\frac{1}{2}\,du$),

$$=\ 2\pi\int_1^2 (2-u)\,u^{\frac{1}{2}}\,du\ =\ 2\pi\left[2\cdot\frac{2}{3}\,u^{\frac{3}{2}}\ -\ \frac{2}{5}\,u^{\frac{5}{2}}\right]_1^2\ =\ \frac{4\pi}{15}\left(8\sqrt{2}-7\right).$$