Tentamen i Linjär Algebra, 7.5p

Distanskurs
15 januari, 2011 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe, telefon 0702-822 844, 035-16 76 53.

Till uppgifterna skall *fullständiga lösningar* lämnas. Lösningarna ska vara *utförligt* redovisade! Varje lösning ska börja överst på nytt papper. Endast en lösning per blad. Lösningar kommer finnas på internet: `http://dixon.hh.se/erja/teach` →`Matematik 1-30` →`Delkurs 2: Linjär algebra`.
Om inget annat påpekas får du förutsätta att koordinatsystemet är ortonormerat (ON).

1. Bevisa att om $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ är en ON-bas och $\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$ så har $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ koordinaterna $x_k = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_k$, $k = 1, 2, 3$. (2p)

2. Antag att $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är en linjär avbildning med avbildningsmatris A. Bevisa att kolonnerna i A är $F(\boldsymbol{e}_1), F(\boldsymbol{e}_2), \ldots, F(\boldsymbol{e}_n)$. (3p)

3. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + w = 2 \\ 2x + z + w = 3 \\ y + z + w = 4 \end{cases}$$
(3p)

4. En triangel spänns av vektorerna $\boldsymbol{u} = (1, -1, 4)$ och $\boldsymbol{v} = (3, 1, -2)$. Beräkna
   (a) triangelns tyngdpunkt. (3p)
   (b) triangelns area. (3p)
   (c) $\tan([\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}])$. (3p)

5. Bilda en ON-bas $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ där $\boldsymbol{e}_1$ är ortogonal mot planet $x - y + z = 0$ och $\boldsymbol{e}_2$ är ortogonal mot linjen $x = 2y = 3z$. (3p)

6. Låt ℓ_1 vara linjen $2x = 1 - y = 4z$ och ℓ_2 vara linjen $1 + x = 2y = 3 - z$.
   (a) Avgör om linjerna skär varandra och i så fall i vilken punkt. (3p)
   (b) Bestäm på parameterform det plan genom origo som spänns av riktningsvektorerna för ℓ_1 och ℓ_2. (3p)

7. Beräkna de värden på a som gör att matrisen
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
får egenvärdena $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ där $\lambda_i = \lambda_j$ för något $i \neq j$. (4p)

LYCKA TILL!