Lösningar till Tentamen i Linjär Algebra, 7.5p

Distanskurs
15 januari, 2011 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe, telefon 0702-822 844, 035-16 76 53.

1. Bevisa att om $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ är en ON-bas och $\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$ så har $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ koordinaterna $x_k = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_k$, $k = 1, 2, 3$. (2p)

   Lösning: (Se *Linjär algebra* av Sparr, s. 71–72.) □

2. Antag att $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är en linjär avbildning med avbildningsmatris A. Bevisa att kolonnerna i A är $F(\boldsymbol{e}_1), F(\boldsymbol{e}_2), \ldots, F(\boldsymbol{e}_n)$. (3p)

   Lösning: (Se *Linjär algebra* av Sparr, s. 166–167.) □

3. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + w = 2 \\ 2x + z + w = 3 \\ y + z + w = 4 \end{cases} \qquad (3p)$$

   Lösning: Den tredje ekvationen kan skrivas som summan av den första och den andra. Därför är ekvationssystemet underbestämt och vi kan fortsätta lösa det genom att utelämna den tredje ekvationen. Vi får

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + w = 2 \\ 2x + z + w = 3 \\ y + z + w = 4 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + z = 1 & (1) \\ x + y + w = 2 & (2) \\ y + z + w = 4 & (3) \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} & x - y + z = 1 & (1') \\ (2)-(1): & 2y - z + w = 1 & (2') \\ & y + z + w = 4 & (3') \end{cases} \sim \begin{cases} & x - y + z = 1 & (1'') \\ & y + z + w = 4 & (2'') \\ (2')+(3'): & 3y + 2w = 5 & (3'') \end{cases}$$

$w = 3s \overset{(3'')}{\Rightarrow} y = \frac{1}{3}(5 - 2 \cdot 3s) = \frac{5}{3} - 2s \overset{(2'')}{\Rightarrow} z = 4 - (\frac{5}{3} - 2s) - 3s = \frac{7}{3} - s \overset{(1'')}{\Rightarrow} x = 1 + \frac{5}{3} - 2s - (\frac{7}{3} - s) = \frac{1}{3} - s$. Alltså: ekvationssystemet är underbestämt och lösningsmängden är linjen $\{(\frac{1}{3}-s,\ \frac{5}{3}-2s,\ \frac{7}{3}-s,\ 3s) : s \in \mathbb{R}\}$. □

4. En triangel spänns av vektorerna $\boldsymbol{u} = (1, -1, 4)$ och $\boldsymbol{v} = (3, 1, -2)$. Beräkna

   (a) triangelns tyngdpunkt. (3p)

   (b) triangelns area. (3p)

   (c) $\tan([\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}])$. (3p)

Lösning:

(a) Triangelns hörn: $(1, -1, 4)$, $(3, 1, -2)$, $(0, 0, 0)$. Därmed är tyngdpunkten enligt välkänd formel $\frac{1}{3}((1, -1, 4) + (3, 1, -2)) = \frac{2}{3}(2, 0, 1)$.

(b) $\frac{1}{2}|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = \frac{1}{2}\left|\left(\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 14^2 + 4^2} = 3\sqrt{6}$.

(c) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 4 \cdot (-2) = -6$ och $|\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}| = 6\sqrt{7} \;\Rightarrow\; \sin([\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]) = -\frac{1}{\sqrt{7}}$. Vidare är (enl. räkning i (b)) $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = 6\sqrt{6} \;\Rightarrow\; \cos([\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]) = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$. Därmed är $\tan([\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]) = \frac{\sin([\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}])}{\cos([\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}])} = \frac{-1/\sqrt{7}}{\sqrt{6}/\sqrt{7}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$. □

5. Bilda en ON-bas $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ där $\boldsymbol{e}_1$ är ortogonal mot planet $x - y + z = 0$ och $\boldsymbol{e}_2$ är ortogonal mot linjen $x = 2y = 3z$. (3p)

Lösning: Normalen till planet är $(1, -1, 1)$ vars längd är $\sqrt{3}$ så låt ($\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$ så är ($\boldsymbol{e}_1$ en normerad vektor som är ortogonal mot det givna planet. Vidare ska $\boldsymbol{e}_2$ vara ortogonal mot den givna linjen och mot $\boldsymbol{e}_1$. Två punker på linjen är $(0, 0, 0)$ och $(6, 3, 2)$ så en riktningsvektor för linjen är $\boldsymbol{r} = (6, 3, 2)$ och ortogonal mot både $\boldsymbol{r}$ och $\boldsymbol{e}_1$ är $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{e}_1 \propto \left(\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) = (5, -4, -9)$ så låt $\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5^2 + (-4)^2 + (-9)^2}}(5, -4, -9) = \frac{1}{\sqrt{122}}(5, -4, -9)$. Slutligen kan vi konstruera $\boldsymbol{e}_3$ mha $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2$ så att den blir ortogonal mot båda dessa. Vi får $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 \propto \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -9 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}\right) = (13, 14, 1)$ så låt $\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{13^2 + 14^2 + 1^2}}(13, 14, 1) = \frac{1}{\sqrt{366}}(13, 14, 1)$. Kontroll av att alla ortogonaliteterna stämmer ger att $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0$, $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0$, $\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0$, $\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{r} = 0$ (genomför alltid denna kontrollräkning!).
□

6. Låt ℓ_1 vara linjen $2x = 1 - y = 4z$ och ℓ_2 vara linjen $1 + x = 2y = 3 - z$.
   (a) Avgör om linjerna skär varandra och i så fall i vilken punkt. (3p)
   (b) Bestäm på parameterform det plan genom origo som spänns av riktningsvektorerna för ℓ_1 och ℓ_2. (3p)

Lösning:

(a) Låt $z = s$ så är ℓ_1 på parameterform $(x, y, z) = (2s, 1-4s, s)$ och om man låter $y = t$ så ges ℓ_2 av $(x, y, z) = (2t-1, t, 3-2t)$. Om dessa linjer skär varandra så ska följande ekvationssystem ha lösning: $\left\{\begin{array}{rcl} 2s & = & 2t-1 \\ 1-4s & = & t \\ s & = & 3-2t \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{rcrl} 2s-2t & = & -1 & (1) \\ -4s-t & = & -1 & (2) \\ s+2t & = & 3 & (3) \end{array}\right.$
$2(1) + (2) : -5t = -3 \;\Rightarrow\; t = \frac{3}{5}$ och $(1) - 2(3) : -6t = -7 \;\Rightarrow\; t = \frac{7}{6}$ vilket är en motsägelse. Alltså har ekvationssystemet ingen lösning, dvs linjerna skär inte varandra någonstans.

(b) Riktningsvektorer för ℓ_1 resp. ℓ_2 är $(2, -4, 1)$ resp. $(2, 1, -2)$. Detta kan man komma fram till genom att ta koefficienterna framför s resp. t i parameterformerna (se deluppgift (a)). Planet (som går genom origo) på parameterform blir därför $(x, y, z) = (2s + 2t, -4s + t, s - 2t)$. $\square$

7. Beräkna de värden på a som gör att matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

får egenvärdena $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ där $\lambda_i = \lambda_j$ för något $i \neq j$. (4p)

Lösning: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & a \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2 - 3\lambda + \lambda^2 - a) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 1$
eller $\lambda^2 - 3\lambda + 2 - a = 0$, dvs $\lambda = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2 + a}$.
Dubbelt egenvärde fås

- om $\sqrt{\frac{9}{4} - 2 + a} = 0$, dvs om $\frac{9}{4} - \frac{8}{4} + a = 0$, dvs om $a = -\frac{1}{4}$
- eller om ett till $\lambda = 1$ vilket kan fås om $\lambda = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$, dvs om $\sqrt{\frac{9}{4} - 2 + a} = \frac{1}{2}$, dvs om $\frac{9}{4} - \frac{8}{4} + a = \frac{1}{4}$, dvs om $a = 0$.

Alltså: de värden på a som ger matrisen dubbelt egenvärde är
$a = -\frac{1}{4}$ ($\Rightarrow\; \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{3}{2}$),
$a = 0$ ($\Rightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$). $\square$