Lösningar till Tentamen i Linjär Algebra, 7.5p

Distanskurs
14 april, 2012 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe, telefon 0702-822 844, 035-16 76 53.

1. Formulera och bevisa produktregeln för determinanter. (3p)

   Lösning: Lösning: (Se s. 203, *Linjär algebra* av G. Sparr.) □

2. För vilka värden på a har ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+y-z &= 2 \\ x+2y+z &= 3 \\ x+y+(a^2-2)z &= a \end{cases}$$

   entydig lösning, och vad är den? (3p)

   Lösning: $(2)-(1):\ y+2z=1$. $(3)-(1):\ (a^2-2)z+z=a-2 \ \Rightarrow\ z=\frac{a-2}{a^2-1}$ omm $|a|\neq 1$. Från $(2)-(1):\ y+2z=1$ får vi att $y=1-\frac{2(a-2)}{a^2-1}=\frac{a^2-2a+3}{a^2-1}$. Från $(1):\ x+y-z=2$ får vi att $x=2-\frac{a^2-2a+3}{a^2-1}+\frac{a-2}{a^2-1}=\frac{a^2+3a-7}{a^2-1}$. Alltså är lösningen $(x,y,z)=\frac{1}{1-a^2}(a^2+3a-7,\ a^2-2a+3,\ a-2)$ omm[1]$|a|\neq 1$.
   Om $a=-1$ fås ekvationssystemet $\begin{cases} x+y-z &= 2 \\ x+2y+z &= 3 \\ x+y-z &= 1 \end{cases}$ som inte har någon lösning eftersom första och tredje ekvationen bildar motsägelse.
   Om $a=1$ fås ekvationssystemet $\begin{cases} x+y-z &= 2 \\ x+2y+z &= 3 \\ x+y-z &= -1 \end{cases}$ som inte heller har någon lösning eftersom första och tredje ekvationen även här bildar motsägelse. □

3. Låt $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ och $B=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Bestäm den matris C sådan att $A(B\boldsymbol{x})=C\boldsymbol{x}$ för alla $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$. (3p)

   Lösning: $A(B\boldsymbol{x})=C\boldsymbol{x}$ omm $C=AB=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Detta kan kontrolleras genom att man utför beräkningen $A(B\boldsymbol{x})$ och $C\boldsymbol{x}$ med $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^T$. □

[1] Dvs "om och endast om".

4. Låt π vara planet $2x + y - 2z = 0$ och $\boldsymbol{v}$ vara vektorn $(5, 4, -2)$.

   (a) Beräkna ortogonalprojektionen av $\boldsymbol{v}$ på π. (3p)

   (b) Bilda mha $\boldsymbol{v}$, en vektor $\boldsymbol{u}$ i π och en tredje vektor $\boldsymbol{w}$ en ON-bas för $\mathbb{R}^3$. (3p)

Lösning:

(a) Normal till π är $\boldsymbol{n} = (2, 1, -2)$. Alla vektorer i π kan skrivas $(s, 2t, s + t)$. För ortogonalprojektionen $\boldsymbol{v}'$ av $\boldsymbol{v}$ på π gäller att om man går från speten av $\boldsymbol{v}$ längden α längs $\boldsymbol{n}$ tills man kommer ned till π står man i spetsen av ortogonalprojektioen $\boldsymbol{v}'$. Dvs $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \alpha\boldsymbol{n}$, dvs $\begin{cases} s + 2\alpha &= 5 \\ 2t + \alpha &= 4 \\ s + t - 2\alpha &= -2 \end{cases}$ Detta ekvationssystem har lösningarna $\alpha = 2$, $t = \frac{1}{2}(4 - 2) = 1$ och $s = 5 - 2 \cdot 2 = 1$ varmed ortogonalprojektionen av $\boldsymbol{v}$ på π är $\boldsymbol{v}' = (1, 2, 2)$.

(b) Vi kan här normera $\boldsymbol{v} = (5, 4, -2)$ för att få den första basvektorn $\boldsymbol{e}_1$. En vektor i planet är $\boldsymbol{u} = (s, 2t, s + t)$ och ortogonal mot $\boldsymbol{v}$ blir den om $0 = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 5s + 8t - 2(s + t) \quad \Rightarrow \quad s = -2t \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{u} = t(-2, 2, -1)$ som normerad ger $\boldsymbol{e}_2$. Den tredje basvektorn ska vara ortogonal mot både $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$. Det innebär att den måste vara parallell med (dvs en multipel av) $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = (4(-1) - (-1)2,\ (-2)(-2) - 5(-1),\ 5 \cdot 2 - 4(-2)) = 9(0, 1, 2)$. (En kontrollräkning här ger att ortogonalitetskriteriet är uppfyllt av att $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$, $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = 0$ och $\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = 0$.) Normeringen ger slutligen basvektorerna

$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{25+16+4}}(5, 4, -2) = \frac{3\sqrt{5}}{(}5, 4, -2)$

$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{4+4+1}}(-2, 2, -1) = \frac{1}{3}(-2, 2, -1)$

$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{1+4}}(0, 1, 2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, 2)$. □

5. Beräkna (den minsta) vinkeln mellan vektorerna $(2, 1, 7)$ och $(3, 4, 5)$. (3p)

Lösning: Enligt definitionen av skalärprodukt har vi att $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}| \cdot \cos([\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}])$. Eftersom $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 6 + 4 + 35 = 45$, $|\boldsymbol{u}|^2 = 4 + 1 + 49 = 54$ och $|\boldsymbol{v}|^2 = 9 + 16 + 25 = 50$ är därmed $\cos([\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]) = \frac{45}{\sqrt{54}\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ och man kan dra slutsatsen (resonera gärna med bild av enhetscirkeln) att vinkeln $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ är antingen $\frac{\pi}{6}$ eller $-\frac{\pi}{6}$.
Enligt definitionen av vektorprodukt är $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}| \cdot \sin([\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}])$. Eftersom $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (1 \cdot 5 - 7 \cdot 4,\ 7 \cdot 3 - 2 \cdot 5,\ 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3) = (-23, 11, 5)$ är $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = \sqrt{529 + 121 + 25} = \sqrt{675} = 15\sqrt{3}$ varmed $\sin([\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]) = \frac{15\sqrt{3}}{\sqrt{54}\sqrt{50}} = \frac{1}{2}$. Alltså är vinkeln $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = \frac{\pi}{6}$. □

6. Låt A vara matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

(a) Lös ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = (A - I)\boldsymbol{b}$ där $\boldsymbol{b} = (1, 2, 1)^T$. (3p)

(b) Beräkna egenvärdena och egenvektorerna för A. (4p)

Lösning:

(a) $A\boldsymbol{x} = (A - I)\boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{x} = A^{-1}(A - I)\boldsymbol{b}$ så vi börjar med att invertera A:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

Därmed är ekvationens lösning

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(b) $0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 3 \\ 1 & 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)((2 - \lambda)(6 - \lambda) - 9) - ((6 - \lambda) - 3) + 3 - (2 - \lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 9\lambda + 1$. Här ser man att $\lambda_1 = 1$ är en rot. Därmed kan $1 - \lambda$ brytas ut: $-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 9\lambda + 1 = (1 - \lambda)(1 - 8\lambda + \lambda^2)$ varmed de övriga rötterna fås av att lösa $\lambda^2 - 8\lambda + 1$ som har lösningarna $\lambda_2 = 4 + \sqrt{15}$ och $\lambda_3 = 4 - \sqrt{15}$. Detta är de 3 egenvärdena. Motsvarande 3 egenvektorer $\boldsymbol{v}_i,\ i = 1, 2, 3$ fås av att lösa ekvationerna $A\boldsymbol{v}_i = \lambda_i\boldsymbol{v}_i,\ i = 1, 2, 3$. Alltså fås $\boldsymbol{v}_1 = (v_{11}, v_{21}, v_{31})^T$ av att lösa ekvationssystemet $\left\{ \begin{array}{rcl} v_{11} + v_{21} + v_{31} & = & 1 \cdot v_{11} \\ v_{11} + 2v_{21} + 3v_{31} & = & 1 \cdot v_{21} \\ v_{11} + 3v_{21} + 6v_{31} & = & 1 \cdot v_{31} \end{array} \right.$ vilket ger $\boldsymbol{v}_1 = (2, 1, -1)^T$. Egenvektorn $\boldsymbol{v}_2 = (v_{12}, v_{22}, v_{32})^T$ fås av att lösa ekvationssystemet $\left\{ \begin{array}{rcl} v_{12} + v_{22} + v_{32} & = & (4+\sqrt{15})v_{12} \\ v_{12} + 2v_{22} + 3v_{32} & = & (4+\sqrt{15})v_{22} \\ v_{12} + 3v_{22} + 6v_{32} & = & (4+\sqrt{15})v_{32} \end{array} \right.$ vilket ger $\boldsymbol{v}_2 = (1, 2.4365, 4.4365)^T$. Egenvektorn $\boldsymbol{v}_3 = (v_{13}, v_{23}, v_{33})^T$ fås av att lösa ekvationssystemet $\left\{ \begin{array}{rcl} v_{13} + v_{23} + v_{33} & = & (4-\sqrt{15})v_{13} \\ v_{13} + 2v_{23} + 3v_{33} & = & (4-\sqrt{15})v_{23} \\ v_{13} + 3v_{23} + 6v_{33} & = & (4-\sqrt{15})v_{33} \end{array} \right.$ vilket ger $\boldsymbol{v}_3 = (2, 1, -1)^T$. $\square$

7. En triangel har hörn i punkterna $(-2,-1,3)$, $(1,1,-3)$ och det tredje hörnet på linjen genom origo med riktningsvektor $(1,2,-6)$. Vilka lägen är möjliga för triangelns tyngdpunkt om triangelarean är 1? (5p)

Lösning: Låt oss kalla triangelns hörn $P_1 = (-2,-1,3)$, $P_2 = (1,1,-3)$ och $P_3 = (t,2t,-6t)$. Då spänner vektorerna $\boldsymbol{u} = P_2 - P_3 = (1-t, t-2t, -3+6t)$, $\boldsymbol{v} = P_1 - P_3 = (-2,-t,-1-2t, 3+6t)$ triangeln och dess area är $\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|$. Eftersom $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = (0, 3-12t, 1-4t)$ är triangelarean $1 = \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}| = \frac{10}{4}(1-8t+16t^2) \Rightarrow t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{80} = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{0.4})$.
Enligt "tyngdpunktsformeln" måste alltså triangeln antingen ha tyngdpunkten

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{3}\Big(-2+1+\tfrac{1}{4}(1+\sqrt{0.4}),\ -1+1+2\cdot\tfrac{1}{4}(1+\sqrt{0.4}),\ 3-3+6\cdot\tfrac{1}{4}(1+\sqrt{0.4})\Big) \\ &= \frac{1}{12}\Big(-2+\sqrt{0.4},\ 2(1+\sqrt{0.4}),\ -6(1+\sqrt{0.4})\Big) \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{3}\Big(-2+1+\tfrac{1}{4}(1-\sqrt{0.4}),\ -1+1+2\cdot\tfrac{1}{4}(1-\sqrt{0.4}),\ 3-3+6\cdot\tfrac{1}{4}(1-\sqrt{0.4})\Big) \\ &= \frac{1}{12}\Big(-3-\sqrt{0.4},\ 2(1-\sqrt{0.4}),\ -6(1-\sqrt{0.4})\Big) \end{aligned}$$

□