Lösningar till Tentamen i Introduktionskurs i Matematik, 7.5p

Distanskurs
30 oktober, 2010, kl. 9.00–13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe (035-16 76 53, 0702-822 844).

Till uppgifterna skall *fullständiga lösningar* lämnas. Lösningarna skall vara *utförligt* redovisade!
Varje lösning skall börja överst på nytt papper. Endast en lösning per blad.

1. Bevisa att det finns oändligt många primtal. (3p)

   Lösning: (Se beviset av Sats 2.3, s. 18 i *Diskret matematik* av Bergström.) □

2. Formulera och bevisa triangelolikheten. (3p)

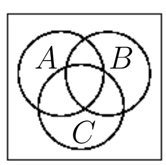
   Lösning: (Se beviset av Sats 1, s. 45 i *Analys i en variabel* av Persson och Böiers.) □

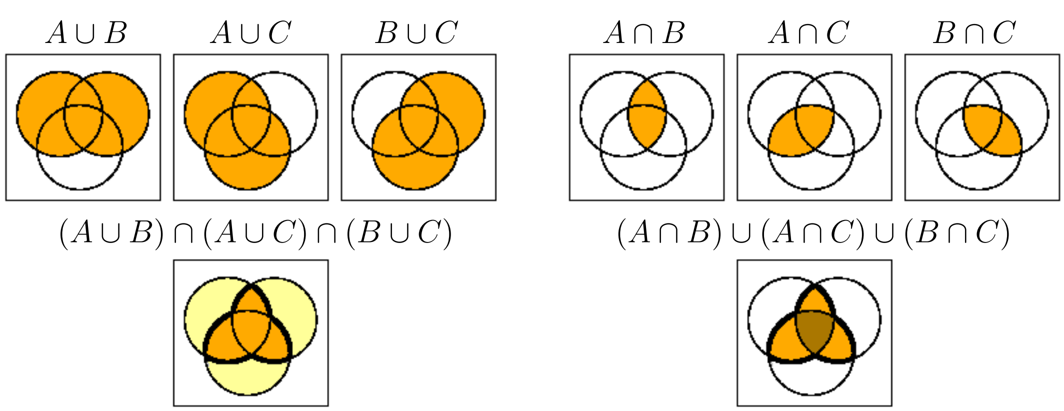
3. Visa (gärna m.h.a. Venn-diagram) att för godtyckliga mängder A, B, C är

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C) \;=\; (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

(3p)

Lösning:





□

4. Talet $3+i$ är en av lösningarna till ekvationen $4z^4-28z^3+69z^2-70z+50 = 0$. Bestäm samtliga lösningar. (3p)

Lösning: Om $3+i$ är en rot så är även konjugatet $3-i$ det. Därmed kan man (enligt satsen om faktorisering av polynom) bryta ut $(z-(3+i))(z-(3-i)) = z^2-(3-i)z-(3+i)z+(3+i)(3-i) = z^2-6z+10$. Polynomdivision ger

$$\frac{4z^4-28z^3+69z^2-70z+50}{z^2-6z+10} = 4z^2-4z+5$$

så de återstående två rötterna fås av $4z^2-4z+5 = 0 \quad\Rightarrow\quad z^2-z+\frac{4}{5} \quad\Rightarrow$ $\Rightarrow\ z=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{5}{4}}=\frac{1}{2}\pm i.$ $\square$

5. Lös fullständigt rekurrensekvationen $r_n-4r_{n+1}+r_{n+2}=1+4n-n^2$ där $r_0=\frac{9}{2}$ och $r_1=4$. (4p)

Lösning:

Hom. ekv. $r_n-4r_{n+1}+r_{n+2}=0$

$\Rightarrow$ kar. ekv. $\lambda^2-4\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda=2\pm\sqrt{4-1}=\begin{cases}2+\sqrt{3}\\2-\sqrt{3}\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow r_{hn}=A(2+\sqrt{3})^n+B(2-\sqrt{3})^n$.

Part.lösn. Ansätter partikulärlösning av samma slag som högerledet, dvs polynom av grad 2: $r_{pn}=an^2+bn+c$. Då är $r_{n+1}=an^2+(2a+b)n+a+b+c$ och $r_{n+2}=an^2+(4a+b)n+4a+2b+c$ och därmed $r_n-4r_{n+2}+r_{n+2}=$
$=(a-4a+a)n^2+(b-4(2a+b)+4a+b)n+c-4(a+b+c)+4a+2b+c=$
$=-2an^2+(-4a-2b)n-2b-2c$. Eftersom detta ska vara lika med $-n^2+4n+1$ för alla n, måste $-2an^2=-n^2$, dvs $a=\frac{1}{2}$ varmed $(-4\cdot\frac{1}{2}-2b)n=4n$, dvs $b=-3$ så slutligen $-2\cdot(-3)-2c=1$ vilket innebär att $c=\frac{5}{2}$. Därmed är $r_{pn}=\frac{1}{2}n^2-3n+\frac{5}{2}$.

Fullst. lösn. $r_n=r_{hn}+r_{pn}=A(2+\sqrt{3})^n+B(2-\sqrt{3})^n+\frac{1}{2}n^2-3n+\frac{5}{2}$. Eftersom, enligt begynnelsevillkoren, $\frac{9}{2}=r_0=A+B+\frac{5}{2}$, dvs $A+B=2$ och $4=r_1=A(2+\sqrt{3})+B(2-\sqrt{3})+\frac{1}{2}-3+\frac{5}{2}=2(A+B)+\sqrt{3}(A-B)$ så måste $\sqrt{3}(A-B)=0$ och därmed $A=B=1$.
Alltså är slutligen $r_n=(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n+\frac{1}{2}n^2-3n+\frac{5}{2}$. $\square$

6. Bevisa att för alla heltal $n \geq 1$ så är

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)} \;=\; \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{n^2+3n+2}$$

(4p)

Lösning: Alternativ I: (Induktion)
$n=1$: $\frac{2}{1\cdot 3} = \frac{2}{3}$ och $\frac{3}{2} - \frac{2\cdot 1+3}{1+3+2} = \frac{2}{3}$ ok.
Antag nu att $\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)} = \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{n^2+3n+2}$. Ska visa att $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2}{k(k+2)} = \frac{3}{2} - \frac{2(n+1)+3}{(n+1)^2+3(n+1)+2}$.
$VL = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)} + \frac{2}{(n+1)(n+3)} = \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{n^2+3n+2} + \frac{2}{(n+1)(n+3)} =$
$= \frac{3}{2} - \frac{(2n+3)(n+3)-2(n+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$. Ska nu visa att $\frac{(2n+3)(n+3)-2(n+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{2(n+1)+3}{(n+1)^2+3(n+1)+2}$.
Eftersom $n^2+3n+2 = (n+1)(n+2)$ så är $(n+1)^2+3(n+1)+2 = (n+2)(n+3)$. Vidare är $(n+3)(n+3) - 2(n+2) = 2n^2+9n+9-2n-4 = 2n^2+7n+5 = (n+1)(2n+1)$.
Därmed är $\frac{(2n+3)(n+3)-2(n+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(2n+5)}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{2(n+1)+3}{(n+1)^2+3(n+1)+2}$ vilket skulle bevisas!

Alternativ II: (Teleskopsumma)
Partialbråksuppdelning av $\frac{2}{k(k+2)}$ ger $\frac{2}{k(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+2} = \frac{a(k+2)+bk}{k(k+2)}$. För att täljarna ska bli lika måste $a(k+2)+bk = 2 \;\Rightarrow\; 2a = 2$ och $(a+b) = 0$ varmed $a = 1$ och $b = -1$, så att $\frac{2}{k(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$. Därmed är $\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}) = (\frac{1}{1} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + \ldots + (\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}) + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{n^2+3n+2}$. $\square$

7. Lös ekvationen $8\cos^8 x + 8\sin^8 x \;=\; 6 + \sin^4(2x)$ fullständigt. (4p)

Lösning: Kom ihåg att $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$. Därför är $\sin^4(2x) = (\sin(2x))^4 =$ $= (2\sin x\cos x)^4 = 16\sin^4 x\cos^4 x$ så ekvationen kan skrivas $8\cos^8 x + 8\sin^8 x =$ $= 6 + 16\sin^4 x\cos^4 x$, dvs $8((\cos^4 x)^2 - 2\cos^4 x\sin^4 x + (\sin^4 x)) = 6$ dvs $(\cos^4 x - \sin^4 x)^2 = \frac{6}{8}$, dvs $(\cos^2 x - \sin^2 x)\underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_{=1} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$, dvs $\cos(2x) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, dvs $2x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ eller $2x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, dvs $x \in \{\pm\pi(\frac{1}{12}+n), \pm\pi(\frac{5}{12}+n) : n \in \mathbb{Z}\}$.$\square$

8. Betrakta ekvationen

$$\sum_{k=0}^{n} x^{2k} = \sum_{k=0}^{2n} x^k$$

där n är ett jämnt tal ≥ 2.

(a) Bestäm 3 rötter. (4p)

(b) Ange hur många rötter ekvationen kan ha maximalt. (2p)

Lösning:

(a) Låt oss kalla ekvationen $\sum_{k=0}^{n} x^{2k} = \sum_{k=0}^{2n} x^k$ för $(*)$. Antag att $x \neq 1$. Då är $\sum_{k=0}^{2n} x^k = \frac{1-x^{2n+1}}{1-x}$. Vidare är $\sum_{k=0}^{n} x^{2k} = \sum_{k=0}^{n}(x^2)^k$. Antag nu att $x^2 \neq 1$, dvs att $x \neq 1$ och $x \neq -1$. Då är $\sum_{k=0}^{n} x^{2k} = \frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2} = \frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2}$. Eftersom $1-x^2 = (1-x)(1+x)$ är ekvationen $(*)$: $1-x^{2n+2} = (1+x)(1-x^{2n+1}) = 1-x^{2n+1}+x-x^{2n+2}$, dvs $x-x^{2n+1} = 0$. Därmed är $x = 0$ en rot. Faktorisering av x ger $x(1-x^{2n})$. Här återstår nu att lösa $x^{2n}-1 = 0$. Eftersom vi antagit att $x \neq 1$ och $x \neq -1$ är inte dessa giltiga lösningar enligt detta resonemang. Men då är n ett jämnt tal ≥ 2 kan vi skriva den återstående ekvationen $x^{4m}-1 = 0$ där $n = 2m$. Detta kan faktoriseras $(x^{2m}-1)(x^{2m}+1) = 0$. Antag nu först att m är jämnt. Då har ekvationen $x^{2m}-1 = (x^2)^m-1 = 0$ rötterna $x^2 = \pm 1$. Därmed är $x = \pm i$ rötter då m är jämnt. Antag istället att m är udda och betrakta den andra faktorn: $x^{2m}+1 = (x^2)^m+1 = 0$. Detta satisfieras också av att $x^2 = -1$, dvs $x = \pm i$. Alltså löses $(x^{2m}-1)(x^{2m}+1) = 0$ av $x = \pm i$ oavsett om m är udda eller jämnt. Alltså är 3 rötter $x_1 = 0$, $x_2 = i$ och $x_3 = -i$. (Om man kollar specialfallen $x = 1$ och $x = -1$ finner man dock att, t.ex. då $n = 2$ och $x = 1$ är $VL = 1^0+1^2+1^4 = 3$ medan $HL = 1^0+1^1+1^2+1^3+1^4 = 5$. Då $n = 2$ och $x = -1$ är $VL = (-1)^0+(-1)^2+(-1)^4 = 3$ medan $HL = (-1)^0+(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+(-1)^4 = 1$. Därmed satisfierar varken $x = 1$ eller $x = -1$ ekvationen $(*)$.)

(b) Om vi utvecklar summorna har vi att $\sum_{k=0}^{n} x^{2k} = x^0+x^2+\ldots+x^{2(n-1)}+x^{2n}$ och $\sum_{k=0}^{2n} x^n = x^0+x^1+x^2+\ldots+x^{2n-2}+x^{2n-1}+x^{2n}$. Ekvationen blir därmed $1+x^2+\ldots+x^{2n-2}+x^{2n} = 1+x^2+\ldots+x^{2n-2}+x^{2n} = 1+x+x^2+\ldots+x^{2n-2}+x^{2n-1}+x^{2n}$, dvs efter lite "städning": $x+x^3+\ldots+x^{2n-3}+x^{2n-1} = 0$. Detta är en ekvation av grad $2n-1$ och kan därmed ha maximalt $2n-1$ rötter. $\square$