Sats 1 (s. 87)

Om $\mathbb{X} \in N_n$

$C(X_i, X_j) = 0$ för alla $i \neq j$

så $X_i \perp X_j$ för alla $i \neq j$

B: (i fallet $\exists \Sigma^{-1}$)

$\forall i \neq j: C(X_i, X_j) = 0 \Rightarrow \sigma_{ij} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sigma_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/\sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

där $\sigma_{ii} = V(X_i)$ och $\det \Sigma = \prod_{i=1}^{n} \sigma_{ii}$

$$\Rightarrow (\mathbb{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbb{x} - \mu) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_i)^2 / \sigma_{ii}$$

$$\Rightarrow f(\mathbb{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbb{x}-\mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbb{x}-\mu)} =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\sigma_{ii}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_i)^2/\sigma_{ii}}$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\sigma_{ii}}}\right)\left(\prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{1}{2}(x_i-\mu_i)^2/\sigma_{ii}}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{ii}}} e^{-\frac{1}{2\sigma_{ii}}(x_i-\mu_i)^2} = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \quad \square$$