Tentamen i Linjär Algebra, 7.5p

Distanskurs
14 januari, 2012 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe, telefon 0702-822 844, 035-16 76 53.

Till uppgifterna skall *fullständiga lösningar* lämnas. Lösningarna ska vara *utförligt* redovisade! Varje lösning ska börja överst på nytt papper. Endast en lösning per blad. Lösningar kommer finnas på internet: `http://dixon.hh.se/erja/teach` → `Matematik 1-30` → `Delkurs 2: Linjär algebra`.
Om inget annat påpekas får du förutsätta att koordinatsystemet är ortonormerat (ON).

1. Formulera och bevisa projektionsformeln. (3p)

2. Bevisa att $(AB)^T = B^T A^T$ för alla $m \times n$-matriser A och $n \times k$-matriser B. (3p)

3. Beräkna tyngdpunkten för triangeln med hörn i punkterna $(1, -1, 4)$, $(4, 3, 1)$ och $(-2, 1, 1)$. (2p)

4. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} (1-\alpha)x_1 + \beta x_2 & = & \alpha \\ \beta x_1 + (1+\alpha)x_2 & = & -\beta \end{cases}$$

   (a) För vilka reella tal α och β har systemet entydig lösning och vad är den? (3p)
   (b) Skriv ekvationssystemet på matrisform, dvs på formen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ där $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. (3p)

5. Betrakta punkten $P = (-8, 7, -10)$, linjen $\ell : 6x = 3y = 1 - 2z$ och planet $\pi : x - 5y + 4z = 1$. Beräkna
   (a) den ortogonala projektionen av P på π. (3p)
   (b) avståndet mellan linjen ℓ och den linje som går genom P och origo. (3p)
   (c) vinkeln mellan riktningsvektorn till ℓ och normalvektorn till π. (3p)

6. Antag att A är en kvadratisk matris sådan att $A^3 - A = A^2$. Beräkna A^{-1}. (3p)

7. Låt

$$M = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

   Bevisa att varje element i M^n är mindre än 1 för alla positiva heltal n. (4p)

LYCKA TILL!