Lösningar till Tentamen i Introduktionskurs i Matematik, 7.5 hp

Distanskurs
7 januari, 2012, kl. 9.00–13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe (035-16 76 53, 0702-822 844).

1. Bevisa att om p är ett primtal som delar produkten ab, så delar p antingen a eller b. (3p)

   Lösning: (Se Sats 2.7, s. 22 i DM.) □

2. Formulera och bevisa binomialteoremet. (3p)

   Lösning: (Se Sats 4.2, s. 48–49 i DM.) □

3. Avgör för vilka värden på de logiska variablerna P och Q utsagan

   $$P \wedge Q \Rightarrow (\neg Q \vee \neg P) \vee P$$

   är sann. Vad kallas en sådan utsaga? (3p)

   Lösning:

P	Q	$P \wedge Q$	$\Rightarrow$	$(\neg Q \vee \neg P)$	$\vee$	P
S	S	S	$\boldsymbol{S}$	F	S	S
S	F	F	$\boldsymbol{S}$	S	S	S
F	S	F	$\boldsymbol{S}$	S	S	F
F	F	F	$\boldsymbol{S}$	S	S	F

   Utsagan är sanna för alla värden på P och Q. En sådan utsaga kallas *tautologi*. □

4. Börje ska köpa billigt godis i mellandagsrean till sin trettondagsfest. Han väljer mellan knäck för 1:50/st, kolor för 3:50/st, chokladbollar för 4:-/st och lyxmazariner för 5:50/st. Han vill att det ska vara 4 gånger så många knäckar som lyxmazariner och att det ska vara 6 kolor fler än antalet chokladbollar. Dessutom får det inte vara färre än 30 st av någon sort. På hur många sätt kan Börje handla för 1000 kronor? (4p)

   Lösning: Om vi låter x beteckna antalet knäckar, y antalet kolor, z antalet chokladbollar och w antalet lyxmazariner. Då ska $1.5x + 3.5y + 4z + 5.5w = 1000$, dvs $3x + 7y + 8z + 11w = 2000$. Dessutom ska $x = 4w$ och $y = 6 + z$ varmed ekvationen blir $3 \cdot 4w + 7(6 + z) + 8z + 11w = 23w + 15z + 42 = 2000$ dvs $23w + 15z = 1958$. Euklides algoritm för 23 och 15 blir

$$\begin{aligned}23 &= 1\cdot 15+8\\ 15 &= 1\cdot 8+7\\ 7 &= 1\cdot 7+1\end{aligned}$$

Därmed är SGD$(23,15)=1$ (vilket vi kanske redan visste). Nystar vi upp baklänges får vi dock en partikulärlösning till hjälpekvationen $23w+15z=1$:

$$\begin{aligned}1 &= 8-7\\ &= 8-(15-1\cdot 8)\\ &= 2\cdot 8-15\\ &= 2(23-15)-15\\ &= 2\cdot 23-3\cdot 15\end{aligned}$$

Därmed är en partikulärlösning $(w,z)=(2,-3)$, varmed en partikulärlösning till ekvationen $23w+15z=1958$ är $(w,z)=1958(2,-3)=(3916,-5874)$. Den allmänna lösningen blir alltså $(w,z)=(-15t+3916, 23t-5874)$ vilket ger de icke-negativa lösningarna

t	w	z	$x=4w$	$y=6+z$
256	76	14	304	20
257	61	37	244	43
258	46	60	184	66
259	31	83	124	89
260	16	106	64	112
261	1	129	4	135

Av dessa lösningar är det 3 kombinationer som uppfyller villkoret att är minst 30 av varje sort. Alltså är svaret att Börje kan handla på 3 sätt:
- 61 knäckar, 37 kolor, 244 chokladbollar och 43 lyxmazariner
- 46 knäckar, 60 kolor, 184 chokladbollar och 66 lyxmazariner
- 31 knäckar, 83 kolor, 124 chokladbollar och 89 lyxmazariner

$\square$

5. Ekvationen $12x^3-20x^2-x+6=0$ har en rationell rot. Finn samtliga rötter. (3p)

Lösning: En rot $x=\frac{p}{q}$ ska satisfiera $p|6$ och $q|12$, dvs $p=\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$ och $q=\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12$ varmed möjliga rötter är $x=1,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3},\pm\frac{1}{4},\pm\frac{1}{6},\pm\frac{1}{12},\pm2,\pm\frac{2}{3}$, $\pm3,\pm\frac{3}{2},\pm\frac{3}{4},\pm6$. Testar:

x	$12x^3-20x^2-x+6$
1	$12-20-1+6>0$
-1	$-12-20+1+6<0$
$\frac{1}{2}$	$\frac{12}{8}-\frac{20}{4}-\frac{1}{2}+6=1>0$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{12}{8}-\frac{20}{4}+\frac{1}{2}+6=0$

Därmed kan vänsterledet faktoriseras: $12x^3-20x^2-x+6=(2x+1)(6x^2-13x+6)$. Och de återsåend två rötterna fås av att lösa andragradaren $x^2-\frac{13}{6}x+1=0 \Rightarrow x=\frac{13}{12}\pm\sqrt{\frac{169}{144}-1}=\frac{13}{12}\pm\frac{5}{12}$.

Alltså är rötterna $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{13}{12}+\frac{5}{12}=\frac{3}{2}$ och $x_3=\frac{13}{12}-\frac{5}{12}=\frac{2}{3}$. $\square$

6. På ett företag jobbar kvinnor och män. Vid en undersökning väljer man ut 3 män och 2 kvinnor. På hur många sätt[1] kan detta göras? (3p)

Lösning: Man kan välja de 2 kvinnorna bland 5 möjliga på $\binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10$ olika sätt. I och med att de övriga 3 platserna är männens blir det inte fler av det. Totalt kan man alltså välja på 10 olika sätt. $\square$

7. Lös ekvationen $(1+z)^3 = 1+i$. (3p)

Lösning: På polär form är $1+z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ och enligt de Moivre är $(1+z)^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$. Eftersom $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} = |(1+z)^3| = r^3$ så måste $r = 2^{1/6}$. Vidare måste $\mathrm{Re}\,((1+z)^3) = (2^{1/6})^3\cos 3\theta = \mathrm{Re}\,(1+i) = 1$ varmed $\cos 3\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ och $\mathrm{Im}\,((1+z)^3) = (2^{1/6})^3\sin 3\theta = \mathrm{Im}\,(1+i) = 1$ varmed även $\sin 3\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Därmed är $3\theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ så $\theta = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n$ varmed $1+z = 2^{1/6}\Big(\cos(\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi n) + i\sin(\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi n)\Big)$, dvs

$$\begin{cases} z_1 = -2^{1/6}\cos\frac{\pi}{12} - 1 + i\,2^{1/6}\sin(\frac{\pi}{12}) \\ z_2 = -2^{1/6}\cos\frac{3\pi}{4} - 1 + i\,2^{1/6}\sin(\frac{3\pi}{4}) \\ z_3 = -2^{1/6}\cos\frac{17\pi}{12} - 1 + i\,2^{1/6}\sin(\frac{17\pi}{12}) \end{cases}$$

$\square$

8. Lös fullständigt rekurrensekvationen

$$r_{n+2} - r_n = ne^{n+2},\ r_0 = r_2 = 0$$

Lösning: Kar. ekv.: $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1 \Rightarrow r_{h,n} = A\cdot 1^n + B\cdot(-1)^n = A + B(-1)^n$. Partikulärlösning: eftersom högerledet är en exponentialfunktion ansätt $r_{p,n} = e^n z_n$. Ekvationen blir då $e^{n+2}z_{n+2} - e^n z_n = ne^{n+2}$. Eftersom $e^n > 0$ för alla n får vi efter division med e^n: $e^2 z_{n+2} - z_n = ne^2$. Eftersom högerledet nu är ett förstagradspolynom ansätts $z_n = Cn + D$ varmed $e^2(C(n+2)+D) - (Cn+D) = (e^2C - C)n + e^2 - D + 2e^2C = ne^2 \Rightarrow e^2C - C = e^2 \Rightarrow C = \frac{e^2}{e^2-1} \Rightarrow D = -\frac{2e^4}{(e^2-1)^2} \Rightarrow r_{p,n} = e^n z_n = \frac{e^{2+n}}{e^2-1}(n - \frac{2e^2}{e^2-1})$. Allm. lösning.: $r_n = r_{h,n} + r_{p,n} = A + B(-1)^n + \frac{e^{2+n}}{e^2-1}(n - \frac{2e^2}{e^2-1})$. Från begynnelsevillkoren $r_0 = r_2 = 0$ får vi $r_0 + r_2$: $2A - \frac{4e^4}{e^2-1} \Rightarrow A = \frac{2e^4}{e^2-1}$ och $r_0 - r_2$: $2B = 0 \Rightarrow B = 0$. Alltså är den fullständiga lösningen $r_n = \frac{2e^4}{e^2-1} + \frac{e^{2+n}}{e^2-1}(n - \frac{2e^2}{e^2-1})$. $\square$

[1] Med "ett sätt" menas här en konfiguration av män och kvinnor. T ex kan man få [man, man, man, kvinna, kvinna] (ett sätt). Man kan också få [man, man, kvinna, man, kvinna] (ett annat sätt).

9. Bevisa att

$$2\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}} \quad \leq \quad 1+\sqrt{5}$$

Lösning: Talet $2\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$ blir resultatet om man följer en talföljd a_n genererad av $a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}=\sqrt{1+\sqrt{1+a_{n-1}}}=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+a_{n-2}}}}=\ldots$ Om vi låter $a_0=1$ så får vi $2a_1=2\sqrt{1+1}=2\sqrt{2}$ vilket ska bevisas $\leq 1+\sqrt{5}$. Kvadrering av båda led ger $(2\sqrt{2})^2=8$ respektive $(1+\sqrt{5})^2=6+2\sqrt{5}$ och eftersom $\sqrt{5}\geq\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$ är $6+2\sqrt{5}\geq 6+2\cdot\frac{3}{2}=9\geq 8$ (varmed $(2\sqrt{2})^2\geq(1+\sqrt{5})^2 \Rightarrow 2\sqrt{2}\geq 1+\sqrt{5}$). Antag nu att $a_n\leq\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. Om vi nu kan visa att $a_{n+1}\leq\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ så följer att $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1+\sqrt{1+1}}}}}}\leq\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. Vi får att $a_{n+1}\leq\sqrt{1+\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ som ska visas $\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, dvs visa att $\frac{3+\sqrt{5}}{2}\leq\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}$, dvs att $2(3+\sqrt{5})\leq 1+2\sqrt{5}+5$. Direkt uträkning av båda dessa led ger dock $6+2\sqrt{5}\leq 6+2\sqrt{5}$ vilket givetvis är sant. Alltså är $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1+\sqrt{1+1}}}}}}\leq\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ Vi kan dock genomföra liknande resonemang även om vi antar att a_0 är andra tal $<\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. Alltså gäller påståendet mer allmänt – man måste dock anta att $a_0<\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. □