Lösningar till Tentamen i Linjär Algebra, 7.5p

Distanskurs
17 januari, 2009 kl. 9.00 – 13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe, telefon 0702-822 844, 035-16 76 53.

Om inget annat påpekas får du förutsätta att koordinatsystemet är ortonormerat (ON).

1. Bevisa att om $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ så är den ortogonala projektionen av $\boldsymbol{u}$ på $\boldsymbol{v}$

$$\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2}\boldsymbol{v} \qquad \text{(3p)}$$

Lösning: (Se *Linjär algebra* av Sparr, s. 65–66.) □

2. Bevisa att om A är ortogonal så är $|\det A| = 1$. (3p)

Lösning: (Se *Linjär algebra* av Sparr, s. 204.) □

3. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x - 2y &= 2 \\ 3x - 8y &= 8 \end{cases}$ (2p)

Lösning: Om vi kallar den övre ekvationen (1) och den undre (2) så får vi $3(1)-(2)$: $(3\cdot(-2)-(-8))y = 3\cdot 2 - 8 \;\Rightarrow\; y = -2/2 = -1 \;\Rightarrow\; x = 2 + 2\cdot(-1) = 0.$ □

4. Låt $\boldsymbol{u} = (1, -2, 1)$, $\boldsymbol{v} = (1, 2, 3)$ och $\boldsymbol{w} = (1, -1, 0)$. Beräkna
   (a) arean av den triangel som spänns av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$. (3p)
   (b) vinkeln mellan $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{w}$. (3p)

Lösning:

(a) Triangelarean $= \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}| = \frac{1}{2}\left|\left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right)\right| =$
$= \frac{1}{2}|(-6-2, 1-3, 2+2)| = \frac{1}{2}\sqrt{64+4+16} = \sqrt{21}$

(b) Eftersom $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{w}|\cos([\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}])$ enligt definitionen av skalärprodukt, är $\cos([\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}]) = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{w}|} = \frac{1\cdot 1+(-2)\cdot(-1)+1\cdot 0}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}} = \frac{3}{\sqrt{6\cdot 2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ varmed vinkeln $[\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}]$ måste vara antingen $+\frac{\pi}{6}$ eller $-\frac{\pi}{6}$. Vilket av dessa fall som är giltigt svar bestäms av $\sin([\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}])$ som kan uttryckas m.h.a. vektorprodukten: $\sin([\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}]) = \frac{|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{w}|}$ där $|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w}| = \left|\left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right)\right| = |(1,1,1)| = \sqrt{3}$

varmed $\sin([\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}]) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6\cdot 2}} = \frac{1}{2}$ vilket innebär att vinkeln är i första kvadranten, dvs vinkeln mellan $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{w}$ är $\pi/6$. $\square$

5. Bestäm kortaste avståndet mellan linjerna
$\ell_1 = \{(3t, 1-t, 5+t) : t \in \mathbb{R}\}$ och $\ell_2 = \{(2-s, 2, 2s) : s \in \mathbb{R}\}$. (3p)

Lösning: En riktningsvektor för ℓ_1 är $\boldsymbol{v}_1 = (3,-1,1)$ och en för ℓ_2 är $\boldsymbol{v}_2 = (-1,0,2)$. Ortogonal mot båda dessa är vektorprodukten $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right)$ $= (-2,-7,-1)$ och därmed även vektorn $\boldsymbol{n} = (2,7,1)$. Om vi nu utgår från en punkt på ℓ_1, går i riktningen $\boldsymbol{n}$ och hamnar på ℓ_2, så måste avståndet mellan punkterna där vi startade och slutade vara minsta avståndet mellan linjerna. Vi får

$$\begin{cases} 3t+2r &= 2-s \\ 1-t+7r &= 2 \\ 5+t+r &= 2s \end{cases} \sim \begin{cases} 3t+2r+s &= 2 \\ -t+7r &= 1 \\ t+r-2s &= -5 \end{cases} \sim \begin{cases} 3t+2r+s &= 2 \\ 23r+s &= 5 \\ 8r-2s &= -4 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} 3t+2r+s &= 2 \\ 23r+s &= 5 \\ 27r &= 3 \end{cases} \Rightarrow \quad r = \tfrac{1}{9}.$$ Därmed är avståndet mellan linjerna

$|\frac{1}{9}(2,7,1)| = \frac{1}{9}\sqrt{4+49+1} = \frac{3\sqrt{6}}{9} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. $\square$

6. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. Beräkna

(a) $\det A$. (3p)

(b) alla egenvärdena till A och en av egenvektorerna till A. (4p)

Lösning:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3-(-9)+(-4) = 2.$

(b) $0 = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} =$

$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2-\lambda & 1 \end{vmatrix} =$

$= -(1-\lambda)(2-\lambda)\lambda - 3(1-\lambda) - (-2\lambda-9) + 2 - 3(2-\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda + 2 \Rightarrow$ $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda - 2 = 0$. Detta är en fullständig tredjegradsekvation. Första försök till lösning är att testa de enklaste kandidaterna $\lambda = 1$ och $\lambda = -1$. Om inte detta funkar kan man gå vidare med sambandet mellan koefficeinterna och rationella rötter t. ex. I detta fall ser man dock att $\lambda = -1$ är en rot varmed $\lambda + 1$ kan brytas ut: $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda^2 - 4\lambda - 2)$ och de återstående två fås av att lösa $\lambda^2 - 4\lambda - 2 = 0$ vilket ger $\lambda = 2 \pm \sqrt{6}$. Därmed är egenvärdena $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2+\sqrt{6}$, $\lambda_3 = 2-\sqrt{6}$. Enklaste egenvektorn blir nu den som svarar mot $\lambda = -1$. För att finna egenvektorn $\boldsymbol{v}$ ska vi lösa $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$. Alltså har vi ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{bmatrix} \sim \begin{cases} 2v_1 + 2v_2 + 3v_3 & = & 0 \\ v_1 + 3v_2 + v_3 & = & 0 \\ v_1 + 3v_2 + v_3 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad v_2 = t, v_3 = 4t, v_1 = -7t$ varmed en egenvektor är $(-7, 1, 4)$. $\square$

7. Antag att $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ och att $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) För vilka $a \in \mathbb{R}$ är matrisen $A + A^{-1} - aI$ inverterbar? (3p)

   (b) Lös ekvationen $(A-I)^2A^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{x}$ där $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning:

(a) En matris är inverterbar om och endast om dess determinant är skild från 0.

Invertering av A: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ varmed

$$\det(A+A^{-1}-aI) = \begin{vmatrix} 1+1-a & 0+0-0 & 0+0-0 \\ 0+2-0 & 1+1-a & 1-1-0 \\ 2-2-0 & 0+0-0 & 1+1-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-a & 0 & 0 \\ 2 & 2-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{vmatrix} =$$

$(2-a)\begin{vmatrix} 2-a & 0 \\ 0 & 2-a \end{vmatrix} = (2-a)^3$ som har nollstället $a = 2$. Alltså är $A + A^{-1} - aI$ inverterbar för alla $a \neq 2$.

(b) $(A-I)^2A^{-1}\boldsymbol{x} = (A^2 - 2AI + I^2)A^{-1}\boldsymbol{x} = (A - 2I + A^{-1})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{x} \Rightarrow$
$\Rightarrow (A - 2I + A^{-1})\boldsymbol{x} + 2I\boldsymbol{x} = (A - 2I + A^{-1} + 2I)\boldsymbol{x} = (A + A^{-1})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Rightarrow$
$\Rightarrow \boldsymbol{x} = (A+A^{-1})^{-1}\boldsymbol{b}$ där invertering av $A+A^{-1}$ fås av att $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow (A + A^{-1})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ varmed

$\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\square$