

18.

$$p \Delta q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q))$$

"Antingen p eller q sanna men inte båda sanna eller båda falska"

a) Ja:

p	q	$(p \vee q)$	$\wedge (\neg(p \wedge q))$	$(p \wedge (\neg q))$	$\vee (q \wedge (\neg p))$
S	S	S	F	F	F
S	F	S	S	S	F
F	S	S	S	F	S
F	F	F	F	F	F

de är ekvivalenta

b)

p	q	r	$(p \Delta q) \wedge r$	\Leftrightarrow	$(p \wedge r) \Delta (q \wedge r)$
S	S	S	F	S	S
S	S	F	F	S	F
S	F	S	S	S	S
S	F	F	S	S	F
F	S	S	S	S	S
F	S	F	S	S	F
F	F	S	F	S	F
F	F	F	F	S	F

19. Visa att $8 \mid a^2 - 1$ om a udda

$$a \text{ udda} \Rightarrow a = 2m + 1, \text{ ngt } m \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow a^2 - 1 = (2m + 1)^2 - 1 = 4m^2 + 4m + 1 - 1 \\ = 4m(m + 1)$$

Heltalet m är antingen udda eller jämnt.

$$m \text{ udda} \Rightarrow \exists k : m = 2k + 1$$

$$\Rightarrow 4m(m + 1) = 4(2k + 1)(2k + 1 + 1) = \\ = 8(2k + 1)(k + 1) \text{ vilket är delbart} \\ \text{med } 8.$$

$$m \text{ jämnt} \Rightarrow \exists k : m = 2k$$

$$\Rightarrow 4m(m + 1) = 4(2k)(2k + 1) = 8k(2k + 1) \\ \text{vilket också är jämnt delbart med } 8.$$

20 Visa att $n^3 - n$ alltid är delbart med 6.

Eftersom 6 primtalsfaktoriseras $2 \cdot 3$ räcker visa att $\underbrace{2 \mid n^3 - n}_a$ och $\underbrace{3 \mid n^3 - n}_b$.

a. Klart att $n = 2k$ eller $n = 2k + 1$ för något $k \in \mathbb{Z}$. Om $n = 2k$ så är $n^3 - n = (2k)^3 - 2k = 8k^3 - 2k = 2(4k^3 - k)$ vilket alltså är en multipel av 2. Om istället $n = 2k + 1$ är $n^3 - n = (2k + 1)^3 - (2k + 1) = (2k)^3 + 3(2k)^2 + 3(2k) + 1 - 2k - 1 = 8k^3 + 12k^2 + 4k = 2(4k^3 + 6k^2 + 2k)$

b. [Med liknande resonemang]
 $n = 3k \Rightarrow n^3 - n = (3k)^3 - 3k = 3(9k^3 - k)$
 $n = 3k + 1 \Rightarrow n^3 - n = (3k + 1)^3 - (3k + 1) = (3k)^3 + 3(3k)^2 + 3(3k) + 1 - 3k - 1 = 27k^3 + 27k^2 + 6k = 3(9k^3 + 9k^2 + 2k)$
 $n = 3k + 2 \Rightarrow n^3 - n = (3k + 2)^3 - (3k + 2) = (3k)^3 + 3(3k)^2 \cdot 2 + 3(3k) \cdot 2^2 + 2^3 - 3k - 2 = 27k^3 + 54k^2 + 33k + 6 = 3(9k^3 + 18k^2 + 11k + 2)$

□

22 b) $(ABCD)_{16}$ decimalt:

$$A=10, B=11, C=12, D=13$$

$$(ABCD)_{16} = A \cdot 16^3 + B \cdot 16^2 + C \cdot 16^1 + D \cdot 16^0$$

$$= 10 \cdot 4096 + 11 \cdot 256 + 12 \cdot 16 + 13 = 43981$$

$$24. \quad 11^{2n} + 5^{2n+1} \equiv 6 \pmod{4}$$

$$\begin{aligned} 11^{2n} + 5^{2n+1} &= (11^2)^n + 5(5^2)^n \\ &\equiv (121 - 4 \cdot 30)^n + (5 - 4)(25 - 4 \cdot 6)^n \\ &= 1^n + 1 \cdot 1^n = 2 \equiv 6 \end{aligned}$$

$$30. \quad 4 \mid (n+1)^3 + (n-1)^3$$

$$\begin{aligned} (n+1)^3 + (n-1)^3 &= \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 - 3n^2 + 3n - 1 \\ &= 2n^3 + 6n = 2n(n^2 + 3) \end{aligned}$$

Om nu ~~n~~ ~~u~~ ~~d~~ ~~a~~ ~~j~~ ~~ä~~ ~~m~~ ~~t~~ så $n = 2m$

$$\Rightarrow (n+1)^3 + (n-1)^3 = 4m((2m)^2 + 3)$$

vilket är en multipel av 4.

Om n udda $n = 2m+1$ så är

$$\begin{aligned} n^2 \text{ udda: } n^2 &= (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = \\ &= 2(2m^2 + 2m) + 1 \text{ varmed } n^2 + 3 \text{ är} \\ \text{jämt! } n^2 + 3 &= 2(2m^2 + 2m) + 4 = 2(2m^2 + 2m + 2) \end{aligned}$$

(27.

Eukl. alg. för polynom =

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = x^3 - 7x^2 + 12x - 6 + x^2 - x$$

$$x^3 - 7x^2 + 12x - 6 = (x^2 - x)(x - 6) + 6x - 6$$

$$x^2 - x = \frac{1}{6}x(6x - 6) + 0$$

Alltså är $6x - 6$ dvs $x - 1 =$

$$= \text{SGD}(x^3 - 6x^2 + 11x - 6, x^3 - 7x^2 + 12x - 6)$$

och det gemensamma nollstället
är alltså $x = 1$.

$$28. \quad x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 17x - 10 \\ + x^3 + 2x^2 - x - 2$$

$$x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 17x - 10 = \underbrace{(x^3 + 2x^2 - x - 2)(x - 7)} + \\ \left(\begin{array}{l} x^4 + (2-7)x^3 + (-14-1)x^2 + (7-2)x + 14 \\ x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 5x + 14 \end{array} \right) \\ + 12x^2 + 12x - 24$$

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = \underbrace{12(x^2 + x - 2) \frac{1}{12}(x + 1)} + 0 \\ x^3 + 2x^2 - x - 2$$

$$\text{SGD}(x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12, x^4 - 5x^3 - 3x^2 - 3x^2 + 17x - 10) = x^2 + x - 2$$

Varmed gemensamma noll ställen fås av

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

29. I fjöd var det skottår 2004

$$\left(\begin{array}{l} 2002-09-23 \text{ är dag nr} \\ 31+28+31+30+31+30+31+31+23 \\ \hline 155+88=243 \end{array} \right)$$

$$\text{Kvar på året } 365 - (243+23) = 99$$

$$2219 - 2002 = 217 \text{ år framåt}$$

varar det 2219:e endast

$$\text{räknar } 243+10=253 \text{ dagar}$$

(En fjärdedel av de 216 åren) - 2
är skottår : 52 skottår

Totalt antal dagar

Två sekel-
skiften där
4x21 och 4x22

$$99 + 216 \cdot 365 + 52 + 253 = 79244$$

Om vi nu räknar (mod 7) fås

$$79244 \equiv 79244 - 77000 = 2244 \equiv$$

$$\equiv 2244 - 2100 = 144 \equiv 144 - 140 = 4$$

Därmed borde 10 september 2219

bli en måndag + 4 = fredag.



3/. Antag att
 a är ett tal skrivet med
basen 10 dvs

$$a = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$$

$$= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

$$= \sum_{k=0}^n a_k \cdot 10^k$$

Men då är $(\text{mod } 9)$

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

$$\equiv a_n (10-9)^n + a_{n-1} (10-9)^{n-1} + \dots + a_1 (10-9) + a_0$$

$$= a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$$

vilket är siffersumman!

Observera att detta bevis gäller
i båda riktningarna!

32. Visa att $\nexists x = 4 \mid x^3 - 2$

Antag motsatsen, dvs att

$\exists x : x^3 - 2 = 4m$ något heltal m .

$$\Rightarrow x^3 = 2 \cdot (2m+1) \Rightarrow \frac{x^3}{2} = 2m+1$$

dvs ett udda tal. Men $\frac{x^3}{2}$ kan aldrig vara udda.

Ty antingen x udda varmed x^3 udda så x^3 ej delbart med 2.

Eller x jämnt men då är x^3 jämnt delbart med 8 varmed $\frac{x^3}{2}$ ej udda.

Alltså $\nexists x = 4 \mid x^3 - 2$

(Man hade även kunnat använda metodiken från uppg 20; $x=4m, 4m+1, 4m+2$ eller $4m+3$ och visa att 4 ej delar $x^3 - 2$ i något av fallen)

33a)

$$5x + 6y = 113 \quad (*)$$

$$\text{SGD}(5, 6) = 1$$

Löser först $5x + 6y = 1$

Uppenbarligen lösningen

$$(x, y) = (-1, 1) \text{ vilket innebär att}$$

$$113(-1, 1) \text{ är en lösning till } (*)$$

och den fullständiga lösningen

$$\begin{aligned} & \{(-113 + 6m, 113 - 5m) : m \in \mathbb{Z}\} \\ & = \{(-113 + 6 \cdot 19 + 6m, 113 - 5 \cdot 19 - 5m) : m \in \mathbb{Z}\} = \{(1 + 6m, 18 - 5m) : m \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Med Eukl. alg. hade vi fått

$$6 = 1 \cdot 5 + 1 \quad (**)$$

$$5 = 5 \cdot 1 + 0 \text{ varmed } \text{SGD}(5, 6) = 1$$

Baklänges

$$(**) = 6 - 1 \cdot 5 = 1$$

$$5 \cdot (-1) + 6 \cdot 1 = 1$$

336)

$$13x + 7y = 576$$

$$\text{Återigen } \text{SGD}(13, 7) = 1$$

och partikulärlösning ej svar:

$$(x, y) = (-1, 2)$$

⇒ Allmän lösning:

$$\begin{aligned} & \{(-576 + 7m, 2 \cdot 576 - 13m) : m \in \mathbb{Z}\} \\ & = \left\{ \overset{m=83}{(5, 73)}, \overset{m=84}{(12, 60)}, (19, 47), \right. \\ & \quad \left. (26, 34), (33, 21), (40, 8) \right\} \end{aligned}$$

34. $35x + 45y = 10000$ där $x =$ antal barnbiljetter och $y =$ antal vuxenbiljetter

$$\text{SGD}(35, 45) = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{10x + 9y = 2000} \quad 7x + 9y = 2000$$

Ekvivalentt ekr.

Eukl. alg.

$$9 = 1 \cdot 7 + 2$$

$$7 = 3 \cdot 2 + 1$$

$$\Rightarrow 1 = 7 - 3 \cdot 2 = 7 - 3(9 - 7) = 4 \cdot 7 - 3 \cdot 9$$

$$\Rightarrow (x_p, y_p) = 2000 \cdot (4, -3) = (8000, -6000)$$

$$\Rightarrow (x, y) = (8000 - 9m, -6000 + 7m)$$

* Vi vill veta maximalt x och eftersom $y \geq 0$ vill vi använda m så att y minimalt

$$\begin{array}{r} 857 \\ 7 \overline{) 6000} \\ \underline{56} \\ 40 \end{array} \Rightarrow m = 858 \Rightarrow y = -6000 + 7 \cdot 858 = 6 \geq 0$$

$$x = 8000 - 9 \cdot 858$$

$$= 8000 - 7722 = 278$$

$$\begin{array}{r} 50 \\ 49 \\ \underline{1} \end{array}$$

Alltså kan högst 278 barnbiljetter ha sålts.



35

Fian n mellan 1111 och 3333 sådant att

$$n - 100 = 101x \quad (1)$$

$$n - 10 = 11y \quad (2)$$

$$(1) - (2) : 101x - 11y = -90$$

$$101 = 9 \cdot 11 + 2$$

$$11 = 5 \cdot 2 + 1$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

$$101x - 11y = 1 \quad \text{lösas av}$$

Eukl.

$$\text{bakläng: } 11 - 5 \cdot 2 = 1$$

$$11 - 5 \cdot (101 - 9 \cdot 11) = 1$$

$$11 \cdot (1 + 45) - 101 \cdot 5 = 1$$

$$101 \cdot (-5) - 11 \cdot (-46) = 1$$

$$\text{Partikulär lös. } (x, y) = (-5, -46)$$

till hjälpekv.

$$\text{Partikulär lös. } (x, y) = -90(-5, -46) = (450, 4140)$$

till fullst. ekv.

Fullständig lös.:

$$\{ (450 - 11m, 4140 - 101m) : m \in \mathbb{Z} \}$$

$$m = 40 \quad (10, 100) \Rightarrow n = 1010 + 100 = 1110$$

$$m = 41 \quad (-1, -1) \Rightarrow n = -1$$

$$m = 39 \quad (21, 201) \Rightarrow n = 2221$$

$$(32, 302) \Rightarrow n = 3332$$

36

$$\sum_{k=1}^n (k+1)(k+5) = \frac{n(2n+7)(n+7)}{6}$$

Basfall $n=1$: $(1+1)(1+5) = 12$

$$\frac{1 \cdot (2+7)(1+7)}{6} = \frac{72}{6} = 12 \quad \text{ok!}$$

Ind. ant. $\sum_{k=1}^n (k+1)(k+5) = \frac{n(2n+7)(n+7)}{6} \quad (*)$

Ind. steg Visa $\sum_{k=1}^{n+1} (k+1)(k+5) = \frac{(n+1)(2(n+1)+7)(n+8)}{6}$

$$VL = \sum_{k=1}^{n+1} (k+1)(k+5) \stackrel{(*)}{=} \frac{n(2n+7)(n+7)}{6} + (n+1+1)(n+1+5) =$$

$$= \frac{1}{6} (2n^3 + 21n^2 + 49n + 6n^2 + 6 \cdot 8n + 6 \cdot 12)$$

$$= \frac{1}{6} (2n^3 + 27n^2 + 97n + 72)$$

$$HL = \frac{1}{6} (n+1)(2n+9)(n+8) = \frac{1}{6} (n+1)(2n^2 + 25n + 72)$$

$$= \frac{1}{6} (2n^3 + 25n^2 + 72n + 2n^2 + 25n + 72)$$

$$= \frac{1}{6} (2n^3 + 27n^2 + 97n + 72) = VL$$

Alltså är satsen bevisad enl. induktionsprincipen.



39

$$\sum_{k=0}^n k 2^{-k} = 2 - (n+2) 2^{-n} = 2(1 - (n+2) 2^{-n-1})$$

Basfall $n=1$ $VL = 1 \cdot 2^{-1} = \frac{1}{2}$
 $HL = 2 - (1+2) 2^{-1} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ (ok!)

Ind. ant $\sum_{k=0}^n k 2^{-k} = 2 - (n+2) 2^{-n}$ (*)

Ind. step $\forall n \sum_{k=0}^{n+1} k 2^{-k} = 2 - (n+3) 2^{-n-1}$

$$VL = \sum_{k=0}^{n+1} k 2^{-k} \stackrel{(*)}{=} 2 - (n+2) 2^{-n} + (n+1) 2^{-(n+1)}$$

$$= 2 - n \underbrace{2^{-n}}_{2 \cdot 2^{-n-1}} - \underbrace{2 \cdot 2^{-n}}_{2 \cdot 2^{-n-1}} + n 2^{-n-1} + 2^{-n-1}$$

$$= 2 + (-2n - 4 + n + 1) 2^{-n-1}$$

$$= 2 + (-n - 3) 2^{-n-1}$$

$$= 2 - (n+3) 2^{-n-1} = HL$$

40 Visa $4 \mid 7^n + 3^{n+1}$

V_i har (mod 4) att

$$7^n + 3^{n+1} \equiv (7-4)^n + 3 \cdot 3^n =$$

$$= 3^n + 3 \cdot 3^n = (1+3)3^n =$$

$$= 4 \cdot 3^n \equiv 0$$



$$42. \quad 49 \mid 8^n - 7n - 1$$

$$\text{Basfall: } n=1 \quad 8^1 - 7 \cdot 1 - 1 = 0 \quad (\text{ok})$$

$$\text{Ind. ant. } 49 \mid 8^n - 7n - 1 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z} :$$

$$8^n - 7n - 1 = 49m \Rightarrow 8^n - 1 = 49m + 7n \quad (*)$$

$$\text{Ind. step Visa } 49 \mid 8^{n+1} - 7(n+1) - 1$$

$$\begin{aligned} 8^{n+1} - 7(n+1) - 1 &= 8 \cdot 8^n - 7n - 7 - 1 = \\ &= 8(8^n - 1) - 7n \stackrel{(*)}{=} 8(49m + 7n) - 7n \\ &= 8 \cdot 49m + (8-1)7n = (8m+n)49 \end{aligned}$$

□

$$48. \quad f_{n+2} = f_n + f_{n+1} \quad f_0 = 0, f_1 = 1$$

$$\text{Visa } f_0^2 + f_1^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$$

$$\text{Basfall } n=0: f_0^2 = 0 = 0 \cdot 1 = f_0 \cdot f_1 \quad (\text{ok!})$$

$$\text{Ind. ant: Antag } f_0^2 + f_1^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1} \quad (*)$$

$$\text{Ind. steg: Visa } f_0^2 + f_1^2 + \dots + f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{n+1} f_{n+2}$$

$$\text{VL} = f_0^2 + f_1^2 + \dots + f_n^2 + f_{n+1}^2$$

$$\stackrel{(*)}{=} f_n f_{n+1} + f_{n+1}^2$$

$$= (f_n + f_{n+1}) f_{n+1}$$

$$= f_{n+2} f_{n+1} = \text{HL}$$



$$49 \text{ b) } x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$$

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$$

$$\text{Kar. ekv. } \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_n = A2^n + B3^n$$

$$d) x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 2^{n+1}$$

$$\text{Hom. ekv. } \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_{hn} = A \cdot 1^n + B2^n = A + B2^n$$

Part. lösn. Ansätter $x_n = z_n 2^{n+1}$ varmed

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = z_{n+2}2^{n+3} - 3z_{n+1}2^{n+2} + 2z_n2^{n+1} = 2^{n+1}$$

$$\Rightarrow 4z_{n+2} - 6z_{n+1} + 2z_n = 1 \text{ (efter div. med } 2^{n+1}\text{)}$$

Ansätter $z_n = c$ (funktioner!) Ansätter istället

$$4c(n+2) - 6c(n+1) + 2cn = 1 \quad z_n = cn$$

$$c(4 \cdot 2 - 6) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow z_n = \frac{n}{2} \Rightarrow x_{pn} = \frac{n}{2} 2^{n+1} = n2^n$$

$$\text{Allm. lösn. } x_n = x_{hn} + x_{pn} = A + B2^n + n2^n$$

$$= 2^n(n+B) + A$$

Fullst. lösn. Sätter in begynnelsevillkor $x_0 = x_1 = 1$

$$1 = x_0 = 2^0(0+B) + A = A + B$$

$$1 = x_1 = 2^1(1+B) + A = A + 2B + 2$$

$$(2)-(1): B = -2 \stackrel{(\ast)}{\Rightarrow} A = 3$$

$$\Rightarrow x_n = 2^n(n-2) + 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1 & (1) \\ A+2B=-1 & (2) \end{cases}$$