Lösningsförslag Introduktionskurs i Matematik 2008-03-12.

1. Lös olikheten $\dfrac{x+1}{x-1} \geq \dfrac{x-1}{x+1}$. *(2p)*

   Svar :

   $$\frac{x+1}{x-1} \geq \frac{x-1}{x+1} \;\Leftrightarrow\; \frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x+1)(x-1)} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{4x}{(x+1)(x-1)} \geq 0.$$

   Teckenstudium av uttrycket ovan ger lösningen: $-1 < x \leq 0 \;\vee\; x > 1 \;\; (x \in \mathbb{R})$.

2. Vi har givet $z = \dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\,i}$. Bestäm z^6. *(2p)*

   Svar :

   $$z^6 = \Big(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\,i}\Big)^6 = \frac{(2\,e^{i\frac{\pi}{3}})^6}{(\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}})^6} = 2^{6+\frac{1}{2}\cdot(-6)}\,e^{i\,(6\cdot\frac{\pi}{3}+(-\frac{\pi}{4})\cdot(-6))} = 8\,e^{i\frac{3\pi}{2}} = -8i.$$

3. Visa att $11^{2n+1} + 5^n$ är delbart med 4 för alla heltal n. *(2p)*

   Svar :

   $11^{2n+1} + 5^n = (3\cdot 4-1)^{2n+1} + (4+1)^n \equiv (-1)^{2n+1} + 1^n = -1 + 1 = 0 \pmod 4.$

4. Avgör om den sammansatta utsagan nedan är en tautologi (dvs om den är sann för alla möjliga sanningsvärden på utsagorna p och q)

   $\neg(p \vee q) \;\Leftrightarrow\; ((\neg\, p) \wedge (\neg\, q)).$ *(2p)*

   Svar:

   Vi sätter upp sanningstabellen för utsagan

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$(\neg\, p) \wedge (\neg\, q)$	$\neg(p \vee q) \;\Leftrightarrow\; ((\neg\, p) \wedge (\neg\, q))$
S	S	F	F	S	F	F	S
S	F	F	S	S	F	F	S
F	S	S	F	S	F	F	S
F	F	S	S	F	S	S	S

   Av tabellen ser vi att utsagan alltid är sann - den är alltså en tautologi.

5. Funktionen f är definierad som $f(x) = e^{-x}+3,\; D_f = \mathbb{R}$. Har f en invers ?
   Bestäm i så fall inversen tillsammans med dess definitions- och värdemängd. *(2p)*

   Svar:

   $y = e^{-x}+3 \;\Leftrightarrow\; x = -\ln(y-3),\;\; (y > 3).$

   Den inversa funktionen är alltså:

   $f^{-1}(x) = -\ln(x-3)$, där $D_{f^{-1}} = V_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 3\},\; V_{f^{-1}} = \mathbb{R}.$

6. Visa att $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n.$ *(3p)*

   Svar:

   Uttrycket visas enklast från höger till vänster genom användning av binomialteoremet:

   $$3^n = (2+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k\, 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k\,.$$

7. Lös rekurrensekvationen $x_{n+2} - x_{n+1} - 2x_n = 0,\ x_0 = -2,\ x_1 = 5\ \ (n \geq 0)$. *(3p)*

Svar:
Löser först den karakteristiska ekvationen $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = -1$.
Det ger den allmänna lösningen (för rekurrensekvationen)

$$x_n = C_1\,(-1)^n + C_2\,2^n.$$

Konstanterna C_1, C_2 bestäms ur

$$\begin{array}{rcl} x_0 & = & -2 \\ x_1 & = & 5 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} C_1 + C_2 & = & -2 \\ -C_1 + 2C_2 & = & 5 \end{array} \Leftrightarrow C_1 = -3,\ C_2 = 1.$$

Insatt: $x_n = 2^n - 3(-1)^n = 2^n + 3(-1)^{n+1}$.

8. Lös ekvationen $4^x - 2^{x+3} + 12 = 0$. *(3p)*

Svar:
Sätt $y = 2^x$. Det ger

$$4^x - 2^{x+3} + 12 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 8 \cdot 2^x + 12 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 8y + 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$y = 2 \vee y = 6 \Leftrightarrow 2^x = 2 \vee 2^x = 6 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{\ln 6}{\ln 2}.$$

9. Lös de trigonometriska ekvationerna

(a) $\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x = 1,\quad 0 \leq x < 2\pi$, *(3p)*

Svar:

$$\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + (-\frac{1}{2})\sin 2x\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\sin\frac{2\pi}{3}\cos 2x + \cos\frac{2\pi}{3}\sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(2x + \frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$2x + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\,k\,\pi \vee 2x + \frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\,k\,\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\,\pi \vee x = \frac{\pi}{12} + k\,\pi,\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Lösningar som uppfyller villkoret $0 \leq x < 2\pi:\quad x = \frac{\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}, \frac{13\pi}{12}, \frac{7\pi}{4}$.

(b) $\cos 2x = \cos x - 1,\quad 0 \leq x < 2\pi$. *(3p)*

Svar:

$$\cos 2x = \cos x - 1 \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \cos x - 1 \Leftrightarrow \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \cos x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\cos x\,(2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$x = (2k+1)\,\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{3} + 2\,k\,\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2\,k\,\pi,\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Som ovan får vi då följande lösningar i intervallet $0 \leq x < 2\pi:\quad x = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$.

10. Ekvationen $z^5 + 2z^4 + 7z^3 - 18z^2 + 26z = 0$ har roten $z = 1 + i$.
Lös ekvationen fullständigt. *(5p)*

Svar:
Vi noterar först att $z^5 + 2z^4 + 7z^3 - 18z^2 + 26z = z(z^4 + 2z^3 + 7z^2 - 18z + 26) = z\,p(z)$.
Vidare är då $1 + i$ även en rot/nollställe till ekvationen $p(z) = 0$. Eftersom $p(z)$ har enbart reella koefficienter, är även $1-i$ ett nollställe till $p(z)$. Det betyder att $(z-(1-i))(z-(1+i)) = z^2-2z+2$ är en faktor i $p(z)$. Polynomdivision ger:

$$\frac{z^4 + 2z^3 + 7z^2 - 18z + 2}{z^2 - 2z + 2} = z^2 + 4z + 13.$$ Ekvationen kan då lösas:

$$z^5 + 2z^4 + 7z^3 - 18z^2 + 26z = 0 \Leftrightarrow z\,(z - (1 - i))\,(z - (1 + i))\,(z^2 + 4z + 13) = 0 \Leftrightarrow$$

$$z = 0 \lor z = 1 - i \lor z = 1 + i \lor (z + 2)^2 = -9 \Leftrightarrow$$

$$z = 0 \lor z = 1 - i \lor z = 1 + i \lor z = -2 - 3i \lor z = -2 + 3i.$$