© 2005 Eric Järpe
Högskolan i Halmstad

forts. Kapitel A: Komplexa tal

Ett uttryck på formen

$$p(z) \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad \text{där } a_0,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{C} \text{ och } a_n\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$$

kallas **polynom av grad *n***. Talen $a_1,\dots,a_n$ kallas **koefficienter** och a_0 kallas **konstant** eller **intercept**. Att den högsta potensen av z är z^n, betecknas $\deg p = n$. Händefter betecknas mängden av alla polynom med $\mathbb{P}$.

Alla polynomekvationer kan uttryckas som $p(z) = 0$ där polynomet $p(z)$ är vänster led minus höger led i ekvationen. Då man löser en polynomekvation fås ett värde, z, som uppfyller likheten $p(z) = 0$. Detta värde kallas **rot** när man håller på med ekvationer. När man håller på med ett polynom $p(z)$ kallas dock dylika värden på z för **nollsällen** för polynomet.

Faktorsatsen

[**Sats 3** (s. 52–53) $\quad \forall\, p\in\mathbb{P} : (p(\alpha) = 0 \;\Rightarrow\; z-\alpha \,|\, p)$

Läs beviset!

Algebrans fundamentalsats

Faktorsatsen är bara ett halvt steg mot vad man kan säga om faktorisering av ett polynom. För att ta hela steget behöver vi först *Algebrans fundamentalsats*:

[**Sats 8** (s. 464) $\quad$ Varje polynom av grad ≥ 1 har åtminstone ett nollställe i $\mathbb{C}$.

Nu kan vi formulera en sats om *faktorisering av ett polynom*:

[**Sats 9** (s. 464)
$\forall\, p\in\mathbb{P} : \Big(\deg p = n \geq 1 \;\Rightarrow\; \exists c, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in\mathbb{C} : p(z) = c(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)\Big)$

Bevis av Sats 9: Antag att $\deg p = n \geq 1$. Enligt Algebrans fundamentalsats finns åtminstone ett nollställe, α_1, till p. Därmed gäller enligt faktorsatsen att
$\exists\, q_1\in\mathbb{P} : (p = (z-\alpha_1)q_1 \,\wedge\, \deg q_1 = n-1)$.
Om nu $n-1 = 0$ är det klart ty då är q_1 konstanten c. Om $n-1 \geq 1$ gäller åter enligt Algebrans fundamentalsats att q_1 har ett nollsälle, α_2, så enligt faktorsatsen
$\exists\, q_2\in\mathbb{P} : (q_1 = (z-\alpha_2)q_2 \,\wedge\, \deg q_2 = n-2)$.
Om $n-2 = 0$ är det klart.
Om inte, finns $\alpha_3\in\mathbb{C}$ och $q_3\in\mathbb{P}$ så att $q_2 = (z-\alpha_2)q_3$ osv. Sista steget blir:
$\exists\, q_n\in\mathbb{P} : (q_{n-1} = (z-\alpha_n)q_n \,\wedge\, \deg q_n = n-n = 0)$ där $q_n = c\in\mathbb{C}$. Därmed är

$$\begin{aligned} p &= (z-\alpha_1)q_1 \\ &= (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)q_2 \\ &\;\vdots \\ &= (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)c\,. \end{aligned}$$

□

Slutligen en sats om att i reella polynom (polynom med reella koefficienter) uppträder komplexa nollställen alltid i *konjugerade par*:

[**Sats 10** (s. 465) $\forall p \in \mathbb{P} : (p(\alpha) = 0 \Leftrightarrow p(\bar{\alpha}) = 0)$

Läs beviset!

Dessa satser är mer än bara användbara; för ekvationslösning utgör de en fundamental grund att bygga vidare på med metoder för att hantera mer eller mindre speciella situationer.

För partialbråksuppdelning av bråket

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

gäller att om

$$q(x) \;=\; q_1(x)q_2(x)\cdots q_n(x)$$

så finns $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ där $\deg p_1 < \deg q_1, \deg p_2 < \deg q_2, \ldots, \deg p_n < \deg q_n$ sådana att

$$\frac{p(x)}{q(x)} \;=\; \frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \frac{p_n(x)}{q_n(x)} + \ldots + \frac{p_n(x)}{q_n(x)}.$$

Exempel

(a) Ekvationen $4z^4 - 24z^3 + 53z^2 - 6z + 13 = 0$ har roten $z = \frac{1}{2}i$.
Bestäm samtliga rötter.

(b) Partialbråksuppdela
$$\frac{10x^3 - 7x^2 + 36x - 2}{x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8x + 8}$$
i reella partialbråk. (Tips: $x = 2i$ är ett nollställe till $x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8x + 8$.)

Lösning:

(a) $z_1 = \frac{1}{2}i$ rot $\Rightarrow$ $z_2 = \bar{z}_1 = -\frac{1}{2}i$ rot $\Rightarrow$ $(z - \frac{1}{2}i)(z + \frac{1}{2}i) = z^2 + \frac{1}{2}iz - \frac{1}{2}iz - (\frac{1}{2})^2 i^2 = z^2 + \frac{1}{4}$ kan brytas ut ur vänsterledet, dvs $4z^2 + 1$ kan brytas ut:
$4z^4 - 24z^3 + 53z^2 - 6z + 13 = (4z^2 + 1)(z^2 - 6z + 13)$.
Den andra andragradsfaktorn ger z_3 och z_4: $z = \frac{6}{2} \pm \sqrt{3^2 - 13} = 3 \pm 2i$.
Ekvationen har rötterna $z_1 = \frac{1}{2}i$, $z_2 = -\frac{1}{2}i$, $z_3 = 3 + 2i$ och $z_4 = 3 - 2i$.

(b) Eftersom $2i$ är en rot är $-2i$ det också varmed $(x - 2i)(x + 2i) = x^2 + 4$ kan faktoriseras ut: $x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8x + 8 = (x^2 + 4)(x^2 - 2x + 2)$. Kan då $x^2 - 2x + 2$ faktoriseras ytterligare i reella faktorer? Kollar: $x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1 - 2} \notin \mathbb{R}$, nej! Därmed blir partialbråksuppdelningen

$$
\begin{aligned}
\frac{10x^3-7x^2+36x-2}{x^4-2x^3+6x^2-8x+8} &= \frac{ax+b}{x^2+4}+\frac{cx+d}{x^2-2x+2} \\
&= \frac{(ax+b)(x^2-2x+2)+(cx+d)(x^2+4)}{(x^2+4)(x^2-2x+2)} \\
&= \frac{(a+c)x^3+(-2a+b+d)x^2+(2a-2b+4c)+(2b+4d)}{x^4-2x^3+6x^2-8x+8} \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} a+c &=& 10 & (1) \\ -2a+b+d &=& -7 & (2) \\ 2a-2b+4c &=& 36 & (3) \\ 2b+4d &=& -2 & (4) \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

$(1') : a = 10 - c$ och $(4') : b = \frac{1}{2}(-2-4d) = -1-2d$.
Används $(1')$ och $(4')$ i (2) och (3) fås
$(2') : -2(10-c+(-1-2d)+d = -7 \ \Rightarrow \ (-2+1)d = -7+2(10-c)+1 \ \Rightarrow$
$\Rightarrow \ d = -(-2c+14) = 2c-14$
och
$(3') : 2(10-c) - 2(-1-2d) + 4c = 36.$
Om man nu sätter $(2') : d = 2c-14$ i $(3')$ fås att
$2(10-c) - 2(-1-2(ec-14)) + 4c = 36 \ \Rightarrow \ 10c = 70 \ \Rightarrow \ c = 7 \Rightarrow \ d = 2 \cdot 7 - 14 = 0 \Rightarrow \ a = 10-7 = 3 \Rightarrow \ b = -1-2\cdot 0 = -1.$ Alltså är partialbråksuppdelningen

$$
\frac{10x^3-7x^2+36x-2}{x^4-2x^3+6x^2-8x+8} = \frac{3x-1}{x^2+4}+\frac{7x}{x^2-2x+2}
$$

$\square$