Högskolan i Halmstad

forts. Kapitel 1: Funktioner

Logaritmen

Definition Det tal x, som löser $a^x = s$, kallas ***a*-logaritmen** av s och betecknas $\log_a s$.

Det finns en speciell bas, $e = 2.71828\ldots$, som visar sig speciellt lämplig vid senare räkningar. e-logaritmen, $\log_e s$, brukar betecknas ln och en allmän logaritm, där basen framgår av den övriga texten, betecknas (lite slarvigt) log. (Jag skriver (ännu slarvigare) nästan alltid log när jag egentligen menar ln, men detta är egentligen inget formellt fel − om basen e framgår av den övriga texten − dock bra att känna till.)

Lär räknelagarna i Sats 9. Beviset är ej så viktigt.

Exempel Lös ekvationerna

(a) $\log\left(\dfrac{3}{x+2} - 2\right) = \log(x-2)$ (b) $\log\left(\dfrac{3}{2-x} - 2\right) = \log(2-x)$

Lösning

(a) Vi har att för högerledet måste $x > 2$ för att $\log(x-2)$ ska vara definierat. För vänsterledet måste $\frac{3}{x+2} - 2 > 0$ varmed $\frac{3}{x+2} > 2 \;\Rightarrow$ $\Rightarrow\; 3 > 2(x+2) \;\Rightarrow\; \frac{3}{2} > x + 2 \;\Rightarrow\; x < \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$. Totalt har vi därmed att $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cap (2, \infty) = \emptyset$. Alltså <u>saknar denna ekvation lösning.</u>

(b) Här har vi att istället att $x < 2$ för att $\log(2-x)$ ska vara definierat. För att vänsterledet ska vara definierat ska $\frac{3}{2-x} - 2 > 0$ varmed $3 > 2(2-x) \;\Rightarrow\; -1 > -2x \;\Rightarrow\; 1 < 2x \;\Rightarrow\; x > \frac{1}{2}$.
Alltså är ekvationen definierad för $x \in (\frac{1}{2}, 2)$. Vi får att

$$\log(2-x) \;=\; \log\left(\frac{3}{2-x} - 2\right) = \log(3 - 2(2-x)) - \log(2-x) \qquad \Rightarrow$$

$\Rightarrow\quad 2\log(2-x) = \log(2x-1)$. Om nu $x < 2$ så är $2\log(x-2) = \log(x-2)^2$ (detta steg är anledningen till att vi inte bara struntade i “loggarna” och skrev $\log(2-x) = \log(\frac{3}{2-x} - 2)$ som $2 - x = \frac{3}{2-x} - 2$ eftersom dessa två ekvationer inte är ekvivalenta!).
Under antagandet att $\frac{1}{2} < x < 2$ är alltså $\log(4 - 4x + x^2) = \log(2x-1)$, dvs $\left[x^2 - 6x + 5 = 0 \text{ och } \frac{1}{2} < x < 2\right]$, dvs $x = 1$ (dock *inte* $x = 5$ eftersom $5 > 2$).
<u>Ekvationen har endast roten $x = 1$</u>. □

Om man skriver $\log a^2$ menas $\log(a^2)$ som är $2\log|a|$ (dvs $2\log a$ om $a > 0$). För att skriva $(\log a)^2$, skriv antingen så eller $\log^2 a$.

Sats 10
Om $\alpha > 0$ och $a > 1$
så $x^\alpha / \log_a x \to \infty$ då $x \to \infty$.

Injektivitet och invers

Definition Om $\forall\, x_1, x_2 \in D_f : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ så kallas f **injektiv**.

Ett trivialt exempel på en injektiv funktion är $f(x) = x$ på $\mathbb{R}$ (dvs med $D_f = \mathbb{R}$). Exempel på icke injektiva funktioner är $f(x) = x^2$ på $\mathbb{R}$ och $f(x) = |x|$ på $(-1, \infty)$. Men observera att på $\mathbb{R}^+$ är både $f(x) = x^2$ och $f(x) = |x|$ injektiva: trivialt gäller att $A \subset B \subseteq D_f \;\Rightarrow\; (f$ injektiv på $B \;\Rightarrow\; f$ injektiv på $A)$ samt att $A \subset B \subseteq D_f \;\Rightarrow\; (f$ ej injektiv på $A \Rightarrow f$ ej injektiv på $B)$.

Läs avsnitt 1.8.1 (s. 85−90) om *invers funktion* ordentligt.

Låt oss för en given funktion f definiera inversen, dvs den inversa funktionen f^{-1}.

Definition Antag att $f : D \to V$ och $g : V \to D$ så att $\forall\, x \in D, y \in V : f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$. Då kallas g den **inversa funktionen** (eller kort och gott **inversen**) till f. Inversen till f betecknas vanligen f^{-1}.

Varför är då detta intressant? Jo, för f är en injektiv funktion om och endast om inversen f^{-1} existerar (dvs f är inverterbar). Eller kortare:

Sats f injektiv $\Leftrightarrow$ f inverterbar

Låt oss ta ett exempel: $f(x) = x^2$ på $\mathbb{R}$ är inte injektiv (t ex $x_1 = -1 \neq 1 = x_2 \not\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$). Den inversa avbildningen är $y = \pm\sqrt{x}$ som inte är en entydigt bestämd funktion (t ex $f(x_1) = -1 \neq 1 = f(x_2) \not\Rightarrow x_1 \neq x_2$), dvs f är ej inverterbar. Ett exempel då villkoren är uppfyllda är: $f(x) = 2x+1$ på $\mathbb{R}$ är injektiv och den inversa funktionen fås genom att lösa ekvationen $f(y) = x$ (dvs $2y + 1 = x$ dvs $y = \frac{1}{2}(x-1)$). Därmed är f inverterbar med inversen $f^{-1}(x) = (x-1)/2$.

Grafiskt är inversen av f speglingen av f i linjen $y = x$ − se exempel 35, 36, 37 i boken!

Sammansättning

Definition **Sammansättningen** av f och g betecknas $g \circ f$ och är definierad av att $g \circ f = g(f(x)),\; x \in D_f$. Funktionen g kallas **yttre funktion** och f **inre funktion**.

Observera att ordningen, $g \circ f$ respektive $f \circ g$, är av avgörande betydelse!

Exempel Låt $f(x) = \ln(5x)$ och $g(x) = e^{x-1}$ båda på $\mathbb{R}^+$. Vad blir sammansättningarna $g \circ f$ respektive $f \circ g$?

Lösning $g \circ f = g(f(x)) = e^{f(x)-1} = e^{\ln(5x)-1} = e^{\ln(5x)} e^{-1} = 5x/e,\; x \in \mathbb{R}^+$.
$f \circ g = f(g(x)) = \ln(5g(x)) = \ln 5 + \ln(e^{x-1}) = x + \ln 5 - 1,\; x \in \mathbb{R}^+$. □

Exempel Dela upp $f(x) = \sqrt{\ln(x^2+1)}$, $x \in \mathbb{R}$ respektive $g(x) = 1 + \ln\sqrt{x-1}$ $x \in (1, \infty)$ i lämpliga sammansättningselement.

Lösning Låt $f_1(x) = \sqrt{x}$. Då är $f(x) = f_1(\ln(x^2+1))$. Låt $f_2(x) = \ln x$ så är $f(x) = f_1(f_2(x^2+1))$. Och med $f_3(x) = x^2+1$ är $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$.

$g(x)$ kan delas upp på flera sätt. Här är två:
I. Låt $g_1(x) = 1 + x$ så är $g(x) = g_1(\ln\sqrt{x-1})$. Vidare $g_2(x) = \sqrt{x}$ ger $g(x) = g_1(g_2(x-1))$. Slutligen $g_3(x) = x - 1$ renderar $g = g_1 \circ g_2 \circ g_3$.
II. Vi har att $g(x) = 1 + \ln\sqrt{x-1} = \ln e + \ln(x-1)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln(e^2(x-1))$ varmed g även kan skrivas $g = g_1 \circ g_2 \circ g_3 \circ g_4$ där $g_1(x) = \frac{1}{2}x$, $g_2(x) = \ln x$, $g_3(x) = e^2 x$, $g_4(x) = x - 1$. $\square$

Detta sätt att ”dissekera” funktioner kommer oss till godo då vi ska börja derivera och integrera så småningom.

Funktionslikhet ”$f(x) = g(x)$ för alla x” skrivs kortare ”$f(x) \equiv g(x)$” eller ännu kortare ”$f = g$”.

Lär begreppen **uppåt** respektive **nedåt begränsad** funktion, **växande** respektive **avtagande** funktion, **jämn** respektive **udda** funktion.