© 2005 Eric Järpe
Högskolan i Halmstad

forts. Kapitel 1: Funktioner

Trigonometri

Detta avsnitt har vi i stor utsträckning redan varit inne på främst i avsnittet om komplexa tal i introduktionsalgebran så jag går endast flyktigt igenom det här. Man bör dock läsa igenom det noga och kontrollera hur mycket man redan kan och fylla i eventuella luckor!

Lär vanliga vinklar, enhetscirkeln, definitionerna av sinus och cosinus.

Exempel *Navigering till havs*
Den gamle sjöbjörnen Rutger är ute med sin skorv och har endast med sig en sextant och ett sjökort. För att få reda på sitt läge vill han bestämma avstånden till två närbelägna fyrar varmed han sedan kan avgöra sin position på sjökortet. Han mäter elevationsvinkeln (dvs vinkeln mellan havsytan, som antas vara ett plan, och linjen mellan Rutger, en punkt på havsytan, och fyrlampan, en annan punkt en bit ovanför havsytan) till Gladan till $\pi/105$ radianer och till Jusen på Hallands Väderö till $\pi/189$ radianer. I sjökortet kan han läsa att Gladan är 58 m hög och Jusen är 37 m hög. Vilket är hans avstånd till Gladan respektive Jusen?

Lösning Beträffande Gladan har vi: beteckna hypotenusan h_1 i den rätvinkliga triangel som bildas av Gladans lampa, Gladans fot och Rutger så är enligt definitionen av sinus $\sin(\pi/105) = 58/h_1 \;\Rightarrow\; h_1 = 1938.8$ meter. Därmed är avståndet k_1 från Rutger till Gladan, enligt Pythagoras sats, $k_1 = \sqrt{1928.8^2 - 58^2} = 1937.9$ meter.

Beträffande Jusen är (med motsvarande resonemang och beteckningar) $\sin(\pi/189) = 37/h_2 \;\Rightarrow\; h_2 = 2226.0$ meter och därmed $k_2 = \sqrt{2226^2 - 37^2} = 2225.7$ meter.

Avslutningsvis, observera två saker:
- för det första hur bra approximationen $k_1 \approx 58 \cdot 105/\pi$ respektive $k_2 \approx 37 \cdot 189/\pi$ blir! Detta beror på att vinklarna är små,
- för det andra att med avstånden till fyrarna och med fyrarnas orientering i förhållande till Rutger – Gladan till höger och Jusen till vänster eller tvärtom – kan Rutger avgöra ”skorvens” läge på sjökortet med hjälp av endast en passare. Därav rubriken ”Navigering till havs”. □

Lär sinussatsen (mycket användbar!) och cosinussatsen och deras bevis.
Lär relationerna mellan sinus, cosinus och tangens. De viktigaste:
$\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$, $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, **dubbla vinkeln:** $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$, **trigonometriska ettan:** $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Obs! Tangens ingår naturligtvis också men cotangens hoppar vi över. Det viktigaste beträffande tangens kan sammanfattas: $\tan x = \sin x / \cos x$.

Läs Exempel 54. Lär Sats 14 och beviset.

Om inverser till $\cos$**,** $\sin$ **och** $\tan$

Egentligen kan man säga att vi redan räknat med inverser till sinus och cosinus eftersom vi lärt oss ett antal vinklar och resonerat ”vissa vinklar måste svara mot vissa sin- respektive cos-värden”. Emellertid vill man även kunna räkna ut vinklar för allmänna sin- och cos-värden genom att använda miniräknaren. Därför angriper vi nu lite mer ordentligt inversen för dessa.

Sinus, cosinus och tangens är typiska exempel på funktioner som *ej* är injektiva på hela $\mathbb{R}$. För att definiera inverser reducerar man därför definitionsmängden till en liten ”snutt” som man kan klara sig med. T ex $f(x) = \sin x$ är injektiv på $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Därmed definieras inversen $f^{-1}(x) = \arcsin x$ som den inversa funktionen till $f(x) = \sin x$ på just $D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (se s. 116–117). Eftersom $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ så fås att $f^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

För cosinus väljer man istället intervallet $[0, \pi]$ där $\cos x$ är injektiv (obs. den är ej injektiv på $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$!) och med detta definieras $f^{-1}(x) = \arccos x$ som inversen till $f(x) = \cos x$ med $D_f = [0, \pi]$. Vi får att $f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$.

Exempel Lös fullständigt ekvationen $\cos(2x) + \sqrt{2}(\sqrt{2}\cos x + 1) = 0$.

Lösning Eftersom $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ så kan ekvationen skrivas $2y^2 - 1 + \sqrt{2}(\sqrt{2}y + 1) = 0$ med $y = \cos x$. Därmed är $y^2 + y + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = 0$ dvs $(y + \frac{1}{\sqrt{2}})(y + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$ med lösningarna $y_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ och $y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1$.
Översatt tillbaka till $x = \cos y$ är detta $x_{1,2} = \pm 3\pi/4$ och $x_{3,4} = \pm\arccos(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) = \pm 1.868$ som alla tillhör intervallet $(-\pi, \pi)$. Totalt har vi därmed lösningsmängden $\{\pm 3\pi/4 + 2\pi n \text{ eller } \pm 1.868 + 2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$. $\square$

För tangens kan man välja det öppna intervallet $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Eftersom $f(x) = \tan x$ är obegränsad då $x \to -\frac{\pi}{2}$ från positiva sidan respektive då $x \to \frac{\pi}{2}$ från negativa sidan, gäller att $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ och att den inversa funktionen $\check{f}(x) = \arctan x$ blir $\check{f} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (se grafen på s. 120).

(Arccotangens bryr vi oss inte om!)

Hyperboliska funktioner

(Här finns det gott om paralleller till komplexa tal och polär form...)

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

Exempel Visa att $\sinh x \cosh x = \dfrac{\sinh(2x)}{2}$.

Lösning Denna typ av "satser" för hyperboliska funktioner visas genom mer eller mindre direkt uträkning – tyd beteckningarna och räkna på!

$$\begin{aligned}
\text{V.L.} &= \sinh x \cosh x \\
&= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
&= \tfrac{1}{4}(e^{2x} + e^0 - e^0 - e^{-2x}) \\
&= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2 \cdot 2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{H.L.} &= \frac{\sinh(2x)}{2} \\
&= \frac{e^{2x} - e^{-(2x)}}{2 \cdot 2}
\end{aligned}$$

$\square$

Talföljder

Detta har vi också varit inne på tidigare iom induktionsavsnittet i introduktions-algebran.

Definition En **talföljd** $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ är en följd $a_0, a_1, a_2, \ldots$ av (i denna kurs reella) tal $a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, 2, \ldots$

Det vanliga hittills har varit att uttrycka explicit: $s_n = n(n+1)/2$. Ibland kan dock talföljder uttryckas rekursivt: $s_1 = 1$ och $s_n = n + s_{n-1}$ för $n \geq 2$.

Läs exemplen 61, 65, 66.

Exempel Låt talföljden $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ vara definierad av att $a_n = \begin{cases} 1 & \text{då } n = 0 \\ \sqrt{1 + a_{n-1}} & \text{då } n \geq 1 \end{cases}$
Bevisa att $1 < a_n < 2$ för alla $n \geq 1$.

Lösning Med induktion har vi att basfallet
$n = 1: \quad 1 < \sqrt{1+1} < 2$ (ok).
Eftersom $f(x) = \sqrt{1+x}$ är en kontinuerlig växande funktion gäller att
$a < x \ \Rightarrow\ \sqrt{1+a} < \sqrt{1+x}$ och $a > x \ \Rightarrow\ \sqrt{1+a} > \sqrt{1+x}$.
Därmed gäller för $n \geq 1$ att:

$a_n < 2:$ Ind.antagande: $a_n < 2$. Visa: $a_{n+1} < 2$.
$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} < \sqrt{1+2} < 2 \quad$ (ok).

$a_n > 1:$ Ind.antagande: $a_n > 2$. Visa: $a_{n+1} > 1$.
$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} > \sqrt{1+1} > 1 \quad$ (ok).

$\square$