© 2005 Eric Järpe
Högskolan i Halmstad

Kapitel A: Komplexa tal

För att kunna lösa fler ekvationer och problem än de vi redan kan, t.ex. ekvationerna $x^2 = -1$ och $e^x = -1$, definieras ett tal, α, sådant att

$$\alpha \cdot \alpha = -1\,.$$

Obs! Detta är *inte ekvivalent* ($\not\Leftrightarrow$) med att definiera $\alpha = \sqrt{-1}$. Visserligen gäller att $\alpha = \sqrt{-1} \Rightarrow \alpha^2 = -1$ men $\alpha^2 = -1 \not\Rightarrow \alpha = \sqrt{-1}$ utan istället $\alpha^2 = -1 \Rightarrow (\alpha = \sqrt{-1} \vee \alpha = -\sqrt{-1})$. Det skulle inte heller vara ekvivalent att definera α med $|\alpha| = \sqrt{-1}$, för beloppet (eller absolutbeloppet) måste vara reellt för att egenskapen att mäta avståndet från origo ska bevaras. Uppenbarligen finns det inget reellt sådant tal, α, och de som tror att de reella talen är "alla" tal får tänka om. Med denna definition av α kan vi utvidga talsystemet och uttrycka lösningar i fall då vi tidigare sagt att "det saknas lösning" (men egentligen menat "det saknas *reell* lösning").

Låt oss betrakta ekvationen

$$x^3 = -1$$

Denna har roten (dvs lösningen) $x = -1$. Innan detta kapitlet har vi sagt att "detta är den enda roten". Men m.h.a. definionen av α kan vi hitta ytterligare två *komplexa* rötter. I själva verket har varje n:te-gradsekvation exakt n rötter, $z_1, z_2, \ldots, z_n$ och kan därför faktoriseras till $(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) = 0$. Vi återkommer till detta senare. Nu när vi bekantat oss lite mer med det "nya" talet α ska vi kalla det vid dess rätta namn, nämligen i.

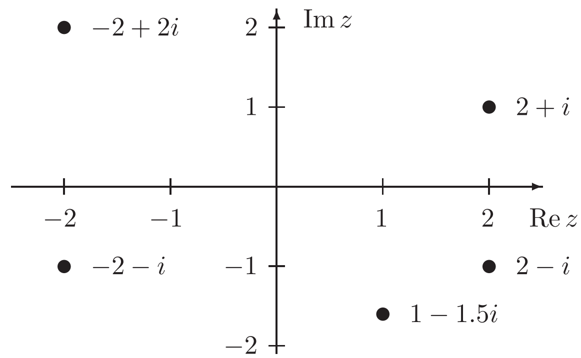
Definitioner och regler (Sats 1 + lite till)

Låt i vara definierat av $i^2 = -1$.
Varje tal $z = a + bi$ där $a, b \in \mathbb{R}$, kallas **komplext**.
Mängden av alla komplexa tal skrivs $\mathbb{C}$.
Realdelen av talet z är den reella termen, a, och betecknas $\operatorname{Re} z$.
Imaginärdelen av talet z är koefficienten till i, b, och betecknas $\operatorname{Im} z$.
(Obs! Imaginärdelen är ett reellt tal, inte ett imaginärt!)
Beloppet av z är $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$.
Konjugatet av z är $\bar{z} = a - bi \in \mathbb{C}$.
Argumentet av z är $\arg z = \theta \in \mathbb{R}$ där $a = |z| \cos\theta$ och $b = |z| \sin\theta$.
Låt $z = a + bi$ och $w = c + di$. Då definieras **de 4 räknesätten**:
$z + w = (a + c) + (b + d)i$
$z - w = (a - c) + (b - d)i$
$z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$
$\dfrac{z}{w} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}\, i$
Formen $z = a + bi$ kallas **rektangulär form**.
Formen $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ kallas **polär form**.
Exponentialfunktionen definieras $e^z = e^a(\cos b + i \sin b)$

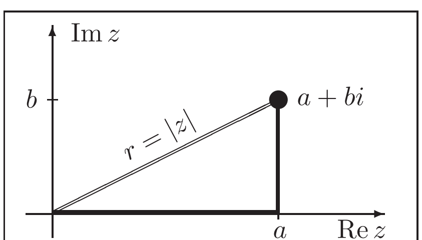
Komplexa talplanet

Det komplexa talplanet kallar man det koordinatsystem där man på x-axeln har realdelen av z: $\operatorname{Re} z$ och på y-axeln har imaginärdelen: $\operatorname{Im} z$. På samma sätt som man kan rita in reella tal, x, på tal-linjen (som kan ses som en x-axel):

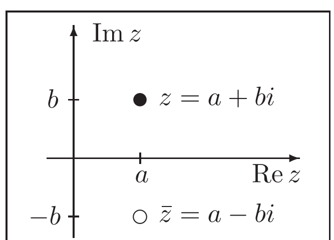
kan man rita in komplexa tal, z, i det komplexa talplanet



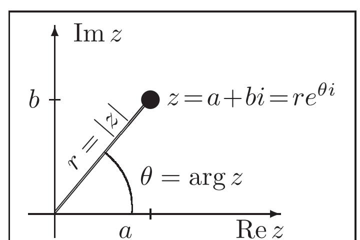
Det komplexa talplanet är för komplexa tal ungefär som Venn-diagram är för mängder: en hjälp för tanken! På samma sätt som beloppet $|x|$ kan ses om avståndet från x's position till origo på tallinjen, kan beloppet $|z|$ av ett komplext tal förstås som avståndet från z's position till origo i det komplexa talplanet. Detta eftersom a är längden av ena kateten, b längden av andra kateten i den rätvinkliga triangeln



Figur a



Figur b



Figur c

(se Figur a). Hypotenusan är då just avståndet från origo. Så med Pythagoras sats, $r^2 = a^2 + b^2$ (där r är längden av hypotenusan), får man att $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Konjugatet av z: $\bar{z}$ kan ses som z's spegelbild över realdelsaxeln (se Figur b).

Argumentet av z: $\arg z$ är vinkeln mellan x-axeln och linjen från origo mot z (se Figur c).

Formeln för multiplikation mellan två komplexa tal, $a+bi$ och $c+di$, härleds genom att utföra multiplikationen:
$(a + bi)(c + di) = ac + bdi^2 + adi + bci = (ac - bd) + (ad + bc)i.$

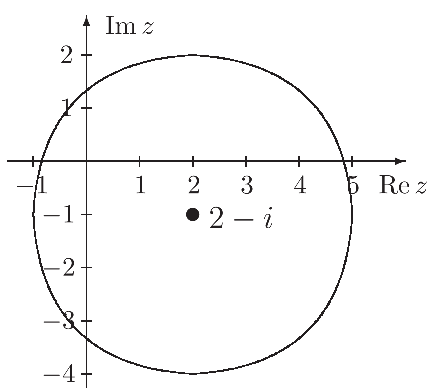
Formeln för kvoten mellan två komplexa tal, $z = a+bi$ och $w = c+di$, härleds genom att *förlänga kvoten med konjugatet till nämnaren*! Då blir nämligen nämnaren reell (!) enligt konjugatregeln: $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2$. Om α byts mot c och β byts mot

di blir vänster ledet $(c+di)(c-di) = w\cdot\bar{w}$ och högerledet blir $c^2-d^2i^2 = c^2+d^2 = |w|^2$ dvs vi har visat att $w\bar{w} = |w|^2$ (mycket användbart!). Härledningen av formeln för kvoten blir nu

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \underbrace{\frac{1}{|w|^2}}_{\text{reell kvot}} \cdot \underbrace{z \cdot \bar{w}}_{\substack{\text{multiplikation} \\ \text{mellan komplexa tal}}}$$

Därmed har divisionen förvandlats till division mellan två reella tal (1 och $|w|^2$) och multiplikationen mellan denna reella kvot, q, och två komplexa tal: $qz\bar{w}$ vilket vi redan kan!

Som tidigare nämnt, med $z = a + bi$, är $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$. Den geometriska tolkningen av $|z|$ är att det är avståndet från z till origo i det komplexa talplanet. Innebörden av $|z - w|$ är att det är avståndet mellan punkterna z och w i det komplexa talplanet. På så vis har t.ex. ekvationen $|z - 2 + i| = 3$ lösningsmängden $=$ de tal z som ligger på cirkelbågen med radie 3 och centrum i punkten $2 - i$ i det komplexa talplanet, eftersom $|z - 2 + i| = |z - (2 - i)|$ och de tal z som ligger på avstånd 3 från $2 - i$ är just talen på cirkelbågen.



Triangelolikheten

Sats 3 (s. 447) $|zw| = |z||w|$ och $|z + w| \le |z| + |w|$ för alla $z, w \in \mathbb{C}$

Läs beviset!

Exempel Visa att $|z^2 + w^2| \le (|z| + |w|)^2$ för alla $z, w \in \mathbb{C}$.

Eftersom z^2 och w^2 är komplexa tal så är
$|z^2 + w^2| \le |z^2| + |w^2|$ enligt Triangelolikheten.
Vidare vet vi att eftersom $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ för alla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
så är $|z^2| + |w^2| = |z|^2 + |w|^2$.
(Absolut-) beloppet är inte bara reellt utan dessutom
alltid icke-negativt så $|z|^2 + |w|^2 \le |z|^2 + |w|^2 + 2|z| \cdot |w|$.
Men det är ju just $(|z| + |w|)^2$!
Sammanfattningsvis har vi visat att

$$|z^2+w^2| \le |z^2|+|w^2| = |z|^2+|w|^2 \le |z|^2+|w|^2+2|z|\cdot|w| = (|z|+|w|)^2 \qquad \square$$