Högskolan i Halmstad

Kapitel 1: Logik och mängdlära

Matematik är en deduktiv (till skillnad från empirisk) vetenskap. Det innebär att man genom att känna till förutsättningarna kan deducera (slutleda sig fram till) resultat.

Matematiken är också en exakt, abstrakt vetenskap vilket tar sitt uttryck i att man från axiomen (de påståenden som anses så självklara att de ej behöver vidare härledning), kan deducera kvantitativa utsagor som med sin beskrivning av en viss del av systemet *är* en del av det.

Sammanfattning av begrepp och beteckningar

Beteckning	*Begrepp*	*Förklaring*	*Exempel*
P	logisk variabel	(kvantitativt) påstående	"En matematisk likhet" eller "en åldersrelation"
S, F	variabelvärde	lydelse av påståendet	$P = S$ $Q =$ "$x = e$ eller $x = \frac{1}{e}$"
$\Rightarrow$	implikation	medför, är tillräckligt villkor för	$P \Rightarrow Q$ t.ex. med värdena $P =$ "Kalle är äldre än Ove och Ove är äldre än Åke" $Q =$ "Kalle är äldre än Åke"
$\Leftarrow$	omvändning	orsakas av att	$P \Leftarrow Q$ t.ex. med $P =$ "$x \geq 5$" och $Q =$ "$x = 5$"
$\Leftrightarrow$	ekvivalens	liktydigt med, $\Leftarrow$ och $\Rightarrow$	$P \Leftrightarrow Q$ t.ex. med $P =$ "Kalle är äldre än Ove" och $Q =$ "Ove är yngre än Kalle"
$\neg$	negation	inte	$\neg P$ t.ex. med $P =$ "$x > 5$" är $\neg P =$ "$x \leq 5$"
$[P \Rightarrow Q]$ $\Leftrightarrow$ $[\neg Q \Rightarrow \neg P]$	kontrapositivt påstående	vändning och negation	T.ex. med $\neg P =$ "a ena kateten, b andra och c hypotenusan i en rätvinklig triangel" $Q =$ "$a^2 + b^2 = c^2$"
$\wedge$	konjunktion	"och", "men"	$P \wedge Q$ t.ex. med $P =$ "x är reellt" $Q =$ "x är irrationellt"
$\vee$	disjunkiton	"eller"	$P \vee Q$ t.ex. med $P =$ "x är ett heltal" $Q =$ "x är irrationellt"
$\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$	endast implikation	tillräckligt men ej nödvändigt villkor	$P \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} Q$ t.ex. med värdena $P =$ "det regnade igår" $Q =$ "det har regnat i år" eller $P =$ "$x \in \mathbb{N}$" $Q =$ "$x \in \mathbb{Q}$"

Falska och sanna påståenden **Implikationsriktning**

OBS! $P \Rightarrow Q$ betyder "om P gäller så gäller Q".
Det betyder *inte* "P gäller, alltså gäller Q".
Detta innebär att implikationen $P \Rightarrow Q$ är sann även
då förutsättningen P inte är sann oavsett vad Q är!

T.ex. om variabeln P är påståendet att "[A är äldre än B] och [B är äldre än C]"
och Q är "A är äldre än C"
så är det klart att *under förutsättningen* P så gäller Q, dvs $P \Rightarrow Q$. Emellertid, om P inte gäller, t.ex. om A är 20 år, B 50 år så har det ingen betydelse om C är 10 år eller 30 år för förutsättningen P är ändå inte uppfylld. Därmed är påståendet "**om** P så Q" dvs $P \Rightarrow Q$ ändå sant!

Ett exempel på detta är ekvationen

$$\begin{aligned}
&1 + \sqrt{x+3} = \sqrt{x+2} \\
&\quad \Rightarrow\ 1 + 2\sqrt{x+3} + x + 3 = x + 2 \\
&\quad \Leftrightarrow\ 2\sqrt{x+3} = -2 \\
&\quad \Rightarrow\ x + 3 = 1 \\
&\quad \Leftrightarrow\ x = -2
\end{aligned}$$

dvs $P \Rightarrow Q$ med $P =$ "$\sqrt{x+3} = -1 + \sqrt{x+2}$" och $Q =$ "$x = -2$".
Här gäller $P \Rightarrow Q$ ty ekvationen P saknar lösning dvs P gäller *ej* och därmed gäller implikationen oavsett Q. Detta är därför ett exempel på att implikations*riktningen* spelar stor roll!

Exempel

Lös ekvationssystemet $\left\{\begin{array}{rcrl} x^2+y^2 & = & 2 & (1) \\ xy & = & -1 & (2) \end{array}\right.$

Lösning:

$(1) \;\Leftrightarrow\; x^2 = 2 - y^2$

$\boxed{(2) \;\Rightarrow\; x^2y^2 = 1} \;\Leftrightarrow\; y^2 = \dfrac{1}{x^2} \quad (x \neq 0 \text{ ty } (2))$

$(2) \text{ i } (1) \;\Rightarrow\; x^2 = 2 - \dfrac{1}{x^2}$

$x^4 + 1 - 2x^2 = 0 \quad (3)$

$x^2(x^2-2) = -1 \quad \boxed{\Rightarrow \; \pm 1} \quad (*)$

$(x-1)(x+1)(Ax^2+Bx+C) = 0$

$(x^2-1)(Ax^2+Bx+C) = 0$

$Ax^4 + Bx^3 + (C-A)x^2 - Bx - C = 0$

Identifiering av koefficienter från (3) ger

$$\left\{\begin{array}{rcl} A & = & 1 \\ B & = & 0 \\ C-A & = & -2 \\ -C & = & 1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} A & = & 1 \\ B & = & 0 \\ C & = & -1 \end{array}\right.$$

$(x-1)(x+1)(x^2-1) = 0$

$(x-1)^2(x+1)^2 = 0$

så $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ är *dubbelrötter*
dvs impliktationen i $(*)$ gäller åt båda håll
dvs $x^2(x^2-2) = -1 \;\Leftrightarrow\; \pm 1$.

Och oavsett om $x = -1$ eller $x = 1$ fås

$y^2 = \dfrac{1}{(-1)^2} = \dfrac{1}{1^2} = 1$
dvs $y_1 = -1$, $y_2 = 1$.

Därmed har vi följande 4 kandidater till lösning: $(x,y) = \left\{\begin{array}{l} (-1,-1) \\ (-1,1) \\ (1,-1) \\ (1,1) \end{array}\right.$

Ekvation (1) satisfieras av samtliga 4 lösningar.
Ekvation (2) endast av $(-1,1)$ och $(1,-1)$.

Därmed gäller att $\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & 2 \\ xy & = & -1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = -1 \text{ och } y = 1 \\ \text{eller} \\ x = 1 \text{ och } y = -1 \end{array}\right.$

$\square$

Konjunktion och disjunktion **de Morgans lagar**

$P \wedge Q$ sant endast om både P och Q sanna.

$P \vee Q$ falskt endast om både P och Q falska.

de Morgans lagar

$$\boxed{\begin{array}{l} \neg(P \wedge Q) \;\Leftrightarrow\; \neg P \vee \neg Q \\ \neg(P \vee Q) \;\Leftrightarrow\; \neg P \wedge \neg Q \end{array}}$$

I övn 1.3 fick vi lösningen
$[x = -1 \wedge y = 1] \vee [x = 1 \wedge y = -1]$.

Om man antar att vi väljer bland lösningskandidaterna
($x = \pm 1$ och $y = \pm 1$) är *negationen* till lösningen
(enl. de Morgans lagar):

$$\begin{aligned} &\neg([x = -1 \wedge y = 1] \vee [x = 1 \wedge y = -1]) = \\ &= \neg[x = -1 \wedge y = 1] \wedge \neg[x = 1 \wedge y = -1]) = \\ &= [\neg(x = -1) \vee \neg(y = 1) \wedge [\neg(x = 1) \vee \neg(y = -1)] = \\ &= [x = 1 \vee y = -1] \wedge [x = -1 \vee y = 1] \end{aligned}$$

dvs $(x, y) = \begin{cases} (-1, -1) \\ (1, 1) \end{cases}$

vilket ju helt riktigt var de 2 andra lösningskandidaterna!

Sanningsvärdestabell

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0	1	1

(Man kan även skriva "Sant" och "Falskt" eller S och F istället för 1 och 0 om man tycker det är mer naturligt.)

M.h.a. sanningsvärdestabell kan långa krångliga logiska uttryck beräknas.

Benämning av utsagor

utsaga	påstående som antingen är sant eller falskt (se vidare 1.9, s. 31)	
tautologi	utsaga som är sann för alla variabelvärden	t.ex. $P \Rightarrow P$, matematiska teorem
kontradiktion *motsägelse*	utsaga som är falsk för alla variabelvärden	t.ex. $P \Rightarrow \neg P$
kontingent	är en utsaga om den kan vara både sann och falsk (beroende på vilka variabelvärdena)	t.ex. $P \Leftrightarrow Q$
kategorisk	är en utsaga om den är sann i endast ett fall och falsk i övriga	t.ex. $P \wedge Q$