Högskolan i Halmstad

forts. Kapitel 1: Logik och mängdlära

$\mathbb{N}$	alla icke-negativa heltal (dvs 0, 1, 2, 3, ...).
$\mathbb{Z}$	alla heltal.
$\mathbb{Z}^+$	alla positiva heltal (dvs 1, 2, 3, ...).
$\mathbb{Q}$	alla tal som kan skrivas på bråkform (*rationella* tal).
$\mathbb{R}$	alla *reella* tal (dvs även tal som ej kan skrivas på bråkform, t.ex. $\sqrt{2}$, π, e o.s.v.).
$\mathbb{R}^+$	alla positiva reella tal.
$\mathbb{C}$	alla *komplexa* tal (dvs tal som kan skrivas $a + bi$ där $a, b \in \mathbb{R}$ och $i^2 = 1$. Mer om komplexa tal mot slutet av kursen).

Obs! $\{1, 3, 7\} \neq \{1, 3, \{7\}\}$
"Tomma mängden" $= \emptyset = \{\}$
$\{\{\}\} \neq \{\}$

Genom att bilda en mängd $A = \{x \in \mathbb{R} : 2|x| < 3\pi\}$ så kan man definiera en funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \cos x & \text{då } x \in A \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \tag{1}$$

Alternativt hade man givetvis kunnat definiera funktionen direkt genom "$f(x) = 1 + \cos x$ då $2|x| < 3\pi$ och 0 annars" men antag att mängden A varit mer komplicerad, då hade det kanske varit mer befogat att göra som i (**??**). Ibland vill man dessutom studera t.ex.

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 + \cos x & \text{då } x \in A \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \tag{2}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 + \cos x & \text{då } x \notin A \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \tag{3}$$

$$f_3(x) = 1 + \cos x \quad \text{då } x \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Då kan detta göras genom att man har definitionen (**??**) för definitionen av f_1, f_2 definieras som i (**??**) fast med $A = \{x : 2|x| \geq 3\pi\}$ (istället för (**??**)) och slutligen f_3 definieras som i (**??**) fast med $A = \mathbb{R}$ (istället för (**??**)). Det blir lättare att bolla med mängderna än med funktionsdefinitionerna.

Övning Visa att mängden $\{a, b \in \mathbb{R} : |a + b| \neq |a| + |b|\}$ inte är tom.

Lösning Det räcker att ange två tal a, b sådana att $|a + b| \neq |a| + |b|$. Det ena av talen måste vara negativt så att $a \neq |a|$ eller $b \neq |b|$, t.ex. $a = 3$, $b = -2$. Däremot kan inte båda vara negativa ty då blir
$|a + b| = -(a + b) = -a + (-b) = |a| + |b|$.

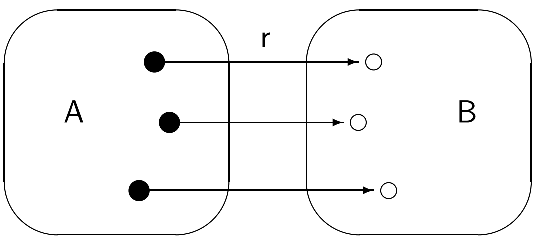
Visserligen gäller **ej** i allmänhet att $|a + b| = |a| + |b|$ (vilket vi just märkt) men allmänt giltig är däremot "triangelolikheten" $|a + b| \leq |a| + |b|$ och den "omvända triangelolikheten" $|a - b| \geq \Big||a| - |b|\Big|$.

Intervall

Öppet intervall: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. Slutet intervall: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$. Halvöppna: $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ och $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$. Obs! $\mathbb{R}$ är det öppna intervallet $(-\infty, \infty)$ och $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ det halvöppna $[0, \infty)$.

Numrerbarhet (Kommer mer i kapitel 4)

Antag att A och B är mängder.
En relation, r, kallas *1-1 relation* mellan A och B om
1. $\forall\, a \in A \exists\, !\, b \in B : r(a) = b$,
2. $\forall\, b \in B \exists\, !\, a \in A : r(a) = b$.



En mängd kallas **numrerbar** (eller uppräknelig) om man kan göra en numrering (eller uppräkning) av alla element i den. Dvs om man kan bilda en 1-1 relation mellan alla element i mängden och de naturlig heltalen.
En mängd som inte är numrerbar kallas **onumrerbar** (eller överuppräknelig).

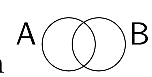
Alla ändliga mängder är numrerbara.

Exempel på oändliga numrerbara mängder är $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ och $\mathbb{Q}$.

Exempel på onumrerbara mängder är $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ och de reella talen på intervallet $(0, 1)$.

Delmängder

A **delmängd** till B (betecknat $A \subseteq B$) om $\forall\, a \in A : a \in B$.
A **äkta** delmängd till B (betecknat $A \subset B$) om $(\forall\, a \in A : a \in B) \wedge (\exists\, b \in B : b \notin A)$.

När man ritar två "godtyckliga" mängder brukar man rita dem 

(eftersom man då har alla möjligheter att beskriva element som har med A eller B att göra: element som ingår i A men inte B, i B men inte A eller i både A och B).

Obs! Att $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Tal i	$\mathbb{Z}$	men ej i	$\mathbb{N}$	kallas	**ej naturliga**
"	$\mathbb{Q}$	"	$\mathbb{Z}$	"	**ej hela**
"	$\mathbb{R}$	"	$\mathbb{Q}$	"	**irrationella**
"	$\mathbb{C}$	"	$\mathbb{R}$	"	**icke-reella**

Obs! Om M, N mängder så är $(M = N) \Leftrightarrow (M \subseteq N \wedge N \subseteq M)$,
dvs för att visa att $M = N$ räcker visa att $m \in M \Rightarrow m \in N$ och att $n \in N \Rightarrow n \in M$.

Mängdoperationer

Antag att A och B är godtyckliga mängder med individområde $\mathcal{U}$. Då är

Beteckning	*Begrepp*	*Förklaring*	*Exempel*
$A \cup B$	Unionen	$\{c : c \in A \vee c \in B\}$	$A = \{1,2\},\ B = \{2,3\}$ $A \cup B = \{1,2,3\}$
$A \cap B$	Snittet	$\{c : c \in A \wedge c \in B\}$	$A \cup B = \{2\}$
$A \setminus B$	Differensen	$\{c : c \in A \wedge c \notin B\}$	$A \setminus B = \{1\}$ $B \setminus A = \{3\}$
A^C	Komplementet	$\{c : c \notin A\} = \mathcal{U} \setminus A$	$\mathcal{U} = \{1,2,3,4,5\}$ $A^C = \{3,4,5\}$
$\|A\|$ eller $\#A$	Kardinaliteten	antal element i A	$\|A\| = 2$ $\|A \cup B\| = 3$

Om man har många mängder, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kan man beteckna unionen resp. snittet mellan dem

$$\text{unionen: } A_1 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad \text{snittet: } A_1 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Mängderna A och B kallas **disjunkta** om $A \cap B = \emptyset$.
(Ekvivalent kan detta även uttryckas $\forall\, a \in A, b \in B : a \notin B \wedge b \notin A$.)

Några bra kom-i-håg regler

Additionssatsen: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; B^C \subseteq A^C$

$A \setminus B \;=\; A \cap B^C$

Predikatlogik

En slutledning, $(P_1 \wedge \cdots \wedge P_n) \Rightarrow Q$, består av *premisser*, $P_1, \ldots, P_n$, och en slutsats, Q. Man kan också skriva slutledningen

$$\begin{array}{l} P_1 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline \therefore Q \end{array}$$

En (korrekt) slutledning är en tautologi.

Om man gör en felaktig slutledning kan felet upptäckas med en sanningsvärdestabell och de värden på variablerna som gör att slutledningen inte blir en tautologi kallas motexempel.

OBS! Det räcker med *ett enda* motexempel för att visa att en slutledning är fel (dvs motbevisa ett påstående)!

Liksom tidigare nämnt handlar $P \Rightarrow Q$ bara om huruvida Q följer av P *om* P gäller. I dagligt tal menar man dock ofta "Q gäller ty (ej 'om') P gäller". En giltig slutledning där premisserna verkligen gäller kallas *sund*.

Några nya beteckningar och begrepp:

Beteckning/Begrepp	*Förklaring*	*Exempel*
definitiv innebörd		$3 \geq 2$
öppen innebörd		$x \geq 2$, $x > y$
$\forall$	"för varje"	
$\exists$	"det finns" (el. "finns det")	
$\mathcal{U}$	individområde dvs de möjliga värden på variabeln för vilka påståendet gäller	

Negering av all-kvantorn resp. existens-kvantorn blir existens-kvantorn resp. all-kvantorn:

$$\neg(\forall x\, P(x)) = \exists x(\neg P(x)) \qquad \text{och} \qquad \neg(\exists x\, P(x)) = \forall x(\neg P(x))$$

(självklart saknar det betydelse om variabeln heter "x" eller "y" – så länge man är konsekvent...)

Vanligt inom matematiken är även formulering som

$$\forall\, p, q \in \mathbb{Z} \exists\, x \in \mathbb{Q} : (x = p/q) \qquad \text{eller} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} \exists!\, x \in \mathbb{R} : (\operatorname{Im} z = x)$$

där områdena anges första gången de förekommer i slutledningen och : utläses "sådant att". Utropstecknet efter $\exists$ anger att existensen är entydig, dvs den andra utsagan betyder "för varje komplext tal finns det ett <u>och endast ett</u> reellt tal som är imaginärdelen av det komplexa talet".

Det kan även nämnas att negationen $\neg(\forall x \in A)$ ofta betecknas $\not\forall x \in A$ och $\neg(\exists y \in B)$ ofta går under namnet $\nexists y \in B$. Negationer av utsagor inkluderande dessa tarvar lite omskrivning.

Utsagan $\forall x \in A \exists y \in B : P(x, y)$ innebär att "för varje x i A finns y i B så att $P(x, y)$". Negationen till detta blir $\exists x \in A \forall y \in B : \neg P(x, y)$ dvs "det finns x i A för varje y i B så att <u>inte</u> $P(x, y)$".

Om vi nu istället har att $\not\forall x \in A \exists y \in B : P(x, y)$ får man omformulera detta som "det finns y i B men inte för varje x i A så att $P(x, y)$." Dvs "det finns y i B och

x i A så att inte $P(x,y)$" vilket med logisk notation skrivs $\exists x \in A, y \in B : \neg P(x,y)$. Negationen av detta blir $\forall x \in A, y \in B : P(x,y)$ ("för varje x i A och y i B är $P(x,y)$").

Om vi har $\forall x \in A\ \nexists y \in B : P(x,y)$ innebär detta att "för varje x i A finns inget y i B så att $P(x,y)$" dvs "för varje x i A och y i B är inte $P(x,y)$" så med logisk notation: $\forall x \in A, y \in B : \neg P(x,y)$. Negationen blir då $\exists x \in A, y \in B : P(x,y)$ dvs "det finns x i A och y i B så att $P(x,y)$".

Bara lite sunt bondförnuft egentligen...

Bevis

Beträffande matematiska bevis, kan nämnas den *sanna* historien om matematikern som i sin doktorsavhandling bevisade en fantastisk (och tillika fantastiskt komplicerad) egenskap hos en hel klass av funktioner. Det visade sig dock senare att han konstruerat en tom klass (dvs det fanns inga funktioner som hade den fantastiska egenskapen!). Beviset var visserligen logiskt korrekt men doktorsgraden drogs in...

Det finns mycket mer att säga om matematisk bevisföring och en stor del av kursen behandlar detta så vi kommer återkomma till olika tekniker i olika delar av kursen.

Definitioner

I definitioner innebär "$\Rightarrow$" inte "implicerar" (som annars) utan "är ekvivalent med" (dvs man använder inte "$\Leftrightarrow$").