© 2005 Eric Järpe
Högskolan i Halmstad

Kapitel 4: Kombinatorik

Kombinatorik är grunden för sannolikhetsteori och statistik. I kombinatoriska problem försöker man besvara frågor av typen "På hur många sätt kan man...?"

I algebran i allmänhet är man kanske inte bortskämd med realistiska exempel. Bortsett från t.ex. diofantiska ekvationer och ett och annat specialfall är det mest grundläggande matematiska kunskaper för vidare raffinering inom analysen och därigenom så småningom tillämpningar. Matematik kan vara roligt i sig och den kan vara vacker och konstnärlig. Men det förefaller mig lite långsökt med exempel om någon som står i komplexa talplanet och undrar hur långt det är till en annan person i ett annat koordiatpar... (Inte desto mindre är naturligtvis de komplexa talen helt nödvändiga inom en rad områden och kunskapen mycket användbar på sikt. Emellertid rår vi inte riktigt på användningarna ännu.) Inom kombinatoriken däremot vimlar det av direkta tillämpningar!

Sats 4.1 Dirichlets lådprincip
Om $n+1$ element ska placeras i n lådor,
så måste åtminstone 1 låda innehålla minst 2 element.

Exempel Bevisa att det finns minst 10 personer i Sverige som har exakt lika många hår på huvudet[1].

Lösning: En vanlig kalufs innehåller mellan 50 000 och 200 000 hårstrån. Antag att alla personer i Sverige har som mest 999 999 (dvs 1 miljon -1) hårstrån. Sveriges befolkning är (mer än) 9 miljoner människor, säg 9 miljoner $+1$ människa. Vi ska visa att det finns minst 10 personer som har exakt lika många hårstrån.

Antag motsatsen, dvs att det finns inte mer än 9 personer som har lika många hår på huvudet. Klassificera var och en av de 9 miljoner personerna efter hur många hårstrån de har. För att det ska bli så få som möjligt i varje grupp, antag att alla fördelar sig helt jämnt över klasserna: 0 hårstrån (9 personer), 1 hårstrå (9 personer), ..., 999 999 hårstrån (9 personer). Eftersom det är 1 miljon klasser med 9 personer i varje klass, är detta 9 miljoner personer. Det innebär att en person återstår att klassificera. Eftersom han måste ha mellan 0 och 999 999 hårstrån på huvudet kommer någon klass innehålla 10 personer. Men detta motsäger antagandet att mindre än 10 personer har lika många hår på huvudet.

Alltså finns (minst) 10 personer som har exakt lika många hårstrån på huvudet. □

Mulitplikationsprincipen
Om man kan välja ett första element på n_1 sätt, ett andra på n_2 sätt, ..., ett k:te på n_k sätt, så är det totala antalet sätt man kan välja de k elementen: $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$.

[1] Denna sats vilar på antagandet att det finns minst 9 miljoner plus 1 person i Sverige. Folkmängden i Sverige var 9 024 186 den 30 juni år 2005.

Exempel En man ska handla en limpa, ett paket smör och en ost. I affären finns 5 sorters limpor, 3 sorters smör och 8 sorters ost. På hur många sätt kan han köpa det han ska?

Lösning: Antalet kombinationer av 1 limpa, 1 paket smör och 1 ost av 5 limpsorter, 3 smörsorter och 8 ostsorter fås som

$$
\begin{array}{rl}
1. & (\text{limpa}_1, \text{smör}_1, \text{ost}_1) \\
2. & (\text{limpa}_1, \text{smör}_1, \text{ost}_2) \\
\vdots & \\
8. & (\text{limpa}_1, \text{smör}_1, \text{ost}_8) \\
9. & (\text{limpa}_1, \text{smör}_2, \text{ost}_1) \\
10. & (\text{limpa}_1, \text{smör}_2, \text{ost}_2) \\
\vdots & \\
16. & (\text{limpa}_1, \text{smör}_2, \text{ost}_8) \\
17. & (\text{limpa}_1, \text{smör}_3, \text{ost}_1) \\
\vdots & \\
24. & (\text{limpa}_1, \text{smör}_3, \text{ost}_8) \\
25. & (\text{limpa}_2, \text{smör}_1, \text{ost}_1) \\
\vdots & \\
120. & (\text{limpa}_5, \text{smör}_3, \text{ost}_8)
\end{array}
$$

dvs $5 \cdot 3 \cdot 8 = 120$ kombinationer. $\square$

Betrakta mängden $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Låt $j_1, j_2, \ldots, j_n$ vara en uppräkning av talen $1, 2, \ldots, n$ (dvs $j_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ och $j_k \neq j_\ell$ närhelst $k \neq \ell$). Då kallas *följden* $(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_n})$ för en **permutation** av A. Observera att permutationen är en *ordnad* mängd. (T.ex. permutationen $(1, 2, 3)$ är ej densamma som $(1, 3, 2)$.)

Låt vidare $\{j_1, j_2, \ldots, j_m\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, $m \leq n$ sådan att $j_k \neq j_\ell$ närhelst $k \neq \ell$. Då kallas följden $(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_m})$ för en **ordnad delmängd** av A med m element.

Delmängden $\{a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_m}\}$ kallas en **kombination** med m element. (T.ex. kombinationen $\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\}$ eftersom kombinationer är mängder.)

Antalet **permutationer** av k element bland n givna är $= \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Antalet **kombinationer** med k element bland de n givna är $= \dbinom{n}{k}$

Exempel Två flickor ska åka tillsammans med sina föräldrar till fjällen. I bilen finns 6 passagerarsäten varav 2 brevid varandra där fram och 4 brevid varandra där bak. På hur många sätt kan 3 föräldrar och de 2 flickorna sitta

(a) om man endast skiljer på flickor och föräldrar?

(b) så att flickorna sitter brevid varandra om man endast skiljer på flickor och föräldrar?

(c) om man skiljer på alla individer (dvs med hänsyn till ordningen)?

(d) så att flickorna sitter brevid varandra om man skiljer på alla individer?

Lösning:

(a) Totalt finns 6 platser varav 2 kommer tas av flickorna och 6 av förläldrarna. Flickorna kan välja sina platser på $\binom{6}{2}$ sätt. Därefter kan föräldrarna välja sina 3 platser på $\binom{4}{3}$ sätt. Totalt alltså

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{3} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot 4 = 60 \text{ sätt.}$$

(Observera att det hade inte haft någon betydelse om vi börjat med föräldrarna och sedan låtit flickorna välja: $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} = 20 \cdot 3 = 60$.)

(b) Om flickorna ska sitta tillsammans måste antingen båda sitta fram eller båda sitta bak. Om flickorna sitter fram kan de bara sitta på 1 sätt (om man inte skiljer på individer). Sedan kan föräldrarna sätta sig på $\binom{4}{3}$ sätt $\Rightarrow$ $1 \cdot \binom{4}{3} = 4$ sätt. Om flickorna sitter bak kan de sitta brevid varandra på 3 sätt och föräldrarna kan sitta på $\Rightarrow \binom{4}{3}$ sätt $\Rightarrow$ $3 \cdot \binom{4}{3} = 12$ sätt. Totalt alltså $4 + 12 = 16$ sätt.

(c) Den första personen kan sitta på en av 6 platser, dvs på 6 sätt, den andra personen kan sätta sig på 5 sätt, ..., den femte personen kan sätta sig på 2 sätt $\Rightarrow$ totalt $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ sätt. (Observera att det hade blivit lika många sätt om det varit 6 personer!)

(d) Om flickorna sitter fram kan de sätta sig brevid varandra på 2 sätt. Föräldrarna kan då sitta bak på $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ sätt $\Rightarrow$ $2 \cdot 24 = 48$ sätt. Om flickorna sitter bak kan de göra det brevid varandra på $2 \cdot 3 = 6$ sätt. Sedan kan föräldrarna sitta på $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ sätt $\Rightarrow$ $6 \cdot 24 = 144$. Totalt alltså $48 + 144 = 192$ sätt. Observera att $\frac{192}{720} = \frac{16}{60}$ dvs det blir samma förhållande mellan total antalet sätt och sätt som flickorna kan sitta brevid varandra, oavsett om man tar hänsyn till ordning eller ej. Om vi bara varit intresserade av att beräkna förhållandet (dvs kvoten vilken faktiskt är sannolikheten att de kan sitta brevid varandra) hade vi kunnat välja att räkna utan att ta hänsyn till ordningen (dvs som i a och b) eller räkna med att ta hänsyn till ordningen (dvs som i c och d) – vilket är en smaksak! □

Exempel *Rysk roulette*

Vid ett fängelse blir 2 fångar, A och B, erbjudna frigivning om de spelar följande variant av rysk roulette mot varandra. De ska spela (maximalt) 3 omgångar. Första omgången består av att A laddar en revolver med en patron. Revolvern rymmer 6 patroner men magasinets 5 övriga platser är tomma. Sedan roterar A magasinet så att ingen vet i vilket läge patronen befinner sig, sätter revolvern mot tinningen och trycker av. Om A överlever går turen över till B. B gör sedan samma sak och turen går tillbaka till A igen för omgång 2. O.s.v. omgång 3. Om någon av dem skulle skjuta sig under spelets gång blir den andre omedelbart frigiven. Om båda klarar av alla 3 omgångarna blir båda frigivna. Vad är oddsen[2] för frigivning av A?

Lösning: Låt oss dela in antalet sätt som A kan vinna, i antalet sätt han kan vinna i tredje omgången, (1), i andra omgången, (2), eller i första, (3).

1. $\#\{\text{A vinner i 3:e omgången}\} =$
$$= \#\left\{\begin{array}{l}\text{A, B klarar sig i 1:a och 2:a,}\\ \text{A klarar sig och B skjuter } \textit{eller} \text{ klarar sig sig i 3:e}\end{array}\right\} =$$
$= 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6 = 5^5 \cdot 6$

2. $\#\{\text{A vinner i 2:e omgången}\} =$
$$= \#\left\{\begin{array}{l}\text{A, B klarar sig i 1:a,}\\ \text{A klarar sig och B skjuter sig sig i 2:e,}\\ \text{A och B kunde ha skjutit eller klarat sig i 3:e}\end{array}\right\} =$$
$= 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 6 = 5^3 \cdot 6^2$

3. $\#\{\text{A vinner i 1:e omgången}\} =$
$$= \#\left\{\begin{array}{l}\text{A klarar sig men B skjuter sig i 1:a,}\\ \text{A och B kunde ha skjutit eller klarat sig i 2:a och 3:e}\end{array}\right\} =$$
$= 5 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 5 \cdot 6^4$

Eftersom det totala antalet sätt är 6^6 är därmed oddsen för att A vinner

$$\frac{5^5 \cdot 6 + 5^3 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6^4}{6^6 - (5^5 \cdot 6 + 5^3 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6^4)} = \frac{5^5 + 5^3 \cdot 6 + 5 \cdot 6^3}{6^5 - 5^5 - 5^3 \cdot 6 - 5 \cdot 6^3} = \frac{4955}{2821}$$

□

[2] Odds = förhållandet mellan antal lyckosamma utfall och antalet olyckliga utfall.
Sannolikhet = förhållandet mellan antal lyckosamma utfall och det totala antalet utfall.