© 2005 Eric Järpe
Högskolan i Halmstad

Kapitel 1: Funktioner

En funktion är en regel, f, som till varje tal ur en definitionsmängd, D_f, ordnar ett tal ur en värdemängd (eller bildmängd), V_f. Detta betecknas $f : D_f \to V_f$. Om funktionen är *av en reell variabel* så är $D_f \subseteq \mathbb{R}$ och om den är *reellvärd* innebär det att $V_f \subseteq \mathbb{R}$.

T.ex. låt $f(x) = x^2$ vara definierad för de positiva talen. Då skriver man $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$[1]. Låter man $f(x) = x^2$ vara definierad för alla reella tal skrivs detta $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$.

Boken anger $f(\ ) = ((\ ) + 1)^3$, $D_f = \mathbb{R}$ som ett sätt att beskriva en funktion. Ekvivalent är även det snarlika $f(\,\cdot\,) = (\,\cdot + 1)^3$, $D_f = \mathbb{R}$ där man istället för variabel anger $\cdot$ (en prick). Detta kan vara bra i speciella situationer men är ganska ovanligt och bara något som är bra att känna till.

Grafer

För att illustrera en funktions egenskaper kan man ”rita funktionskurvan”/”plotta grafen” i ett koordinatsystem. ”Öppna gränser” brukar avbildas med tomma cirklar, $\circ$, (se s. 39−40). På samma sätt är det vanligt att vid ”slutna gränser” avbilda med fyllda cirklar, $\bullet$, vilket dock ej görs i denna boken.

Läs om *Heavisides funktion* $\theta(t)$, *heltalsfunktionen* $[x]$, och *talföljd* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ i exempel 5, 6, 7.

Absolutbeloppet

Exempel 9 (alternativ variant)
Lös ekvationen $|x - \frac{3}{2}| = 2x + \frac{1}{2}$.

Vi börjar med att multiplicera båda led med 2:
$|2x - 3| = 4x + 1$.
Kvadrera sedan båda led (kom ihåg att detta kan ge falska rötter):
$4x^2 - 12x + 9 = 16x^2 + 8x + 1$
$12x^2 + 20x - 8 = 0$
$x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = 0$
$x = -\frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} + \frac{24}{36}} = \begin{cases} \frac{1}{3} \\ -2 \end{cases}$
Kontroll ger $|2 \cdot \frac{1}{3} - 3| = |-\frac{7}{3}| = \frac{7}{3}$
och $4 \cdot \frac{1}{3} + 1 = \frac{7}{3}$ så $x = \frac{1}{3}$ är en rot.
Vidare är $|2 \cdot (-2) - 3| = |-7| = 7$
men $4 \cdot (-2) + 1 = -7$ så $x = -2$ är en falsk rot. □

Sats 1 (Triangelolikheten)
$\forall\, x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|,\ \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$

[1] Observera att vanliga runda parenteser ”(” och ”)” betyder samma sak som bokens bak-och-fram-vända klamrar ”]” resp. ”[”. Dvs det öppna intervallet från a till b kan ekvivalent betecknas (a, b) och $]a, b[$. En smaksak alltså.

Bevis:
Eftersom $x + y \leq |x| + |y|$ och $-x - y \leq |x| + |y|$ så är
$|x + y| = \max(x + y, -x - y) \leq |x| + |y|$.

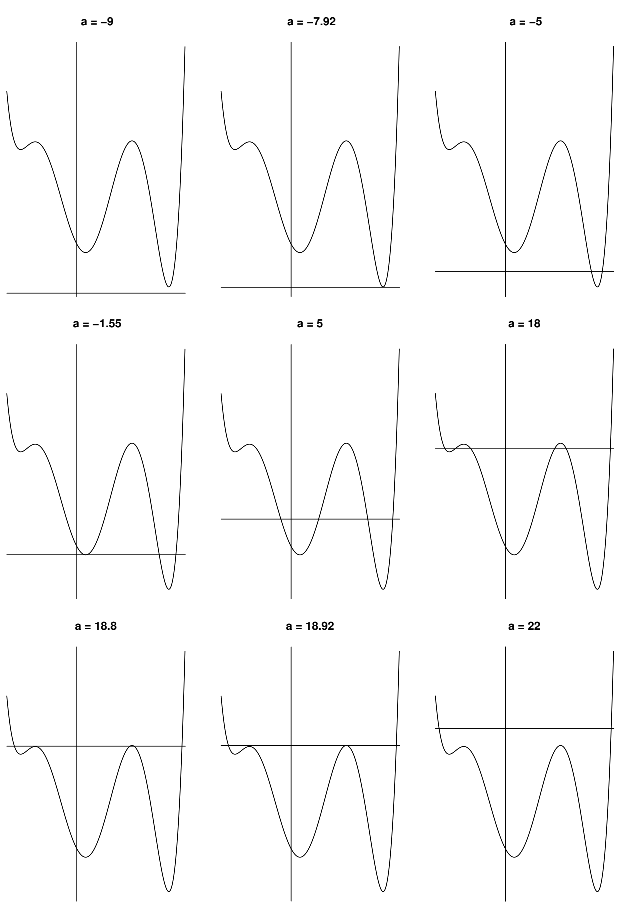
Alltså är $|x + y| \leq |x| + |y|$.
Om man här byter x mot $x - y$ fås att $|x| \leq |x - y| + |y|$
och om man byter y mot $y - x$ fås att $|y| \leq |x| + |y - x|$
dvs $|x| - |y| \leq |x - y|$ och $|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$.
Därmed är $\Big||x| - |y|\Big| = \max(|x| - |y|, |y| - |x|) \leq |x - y|$. $\square$

Läs definitionen av polynom.

Exempel

Låt $f(x) = x^6 - 2x^5 - 8x^4 + 10x^3 + 21x^2 - 12x - a$. Finn approximativt för vilka värden på a som $f(x)$ har 6 reella nollställen, 5 reella nollställen, …, 1 reellt nollställe och saknar reella nollställen.

Lösning $f(x) = 0$ är en fullständig 6:e-gradsekvation som är *omöjlig* att lösa exakt! Den norske matematikern Niels Henrik Abel (som endast blev 27 år gammal) bevisade i början av 1800-talet att ekvationer av ordning ≥ 5 saknar generell lösningsregel som endast utnyttjar de fyra räknesätten och ett ändligt antal rotutdragningar. Emellertid, låt oss plotta grafen för $f(x)$ för några olika värden på a.



Man "ser" att för $\alpha < -7.92$ saknas nollställen, för $a \approx -7.92$ har f 1 nollställe, för $-7.92 < a < -1.55$ har f 2 nollställen, för $a \approx -1.55$ har f 3 nollställen, för $-1.55 < a < 17.5$ har f 4 nollställen, för $a \approx 17.5$ har f 5 nollställen, för $17.5 < a < 18.8$ har f 6 nollställen (faktum är att om $a = 18$ så är $f(x) = (x^2 - 3)(x^2 - 2)(x + 1)(x - 3)$), för ≈ 18.8 har f 5 nollställen, för $18.8 < a < 18.92$ har f 4 nollställen, för $a \approx 18.92$ har f 3 nollställen och för $a > 18.92$ har f 2 nollställen.
Med andra ord har vi:

antal ställen	intervall för a
0	$(-\infty, -7.92)$
1	$\{-7.92\}$
2	$(-7.92, -1.55) \cup (19.92, \infty)$
3	$\{-1.55, 18.92\}$
4	$(-1.55, 17.5) \cup (18.8, 19.92)$
5	$\{17.5, 18.8\}$
6	$(17.5, 18.8\}$

Med hjälp av en sådan redogörelse kan man ta itu med mer mödosamma arbeten som t ex att visa att $f(x) > 0$ för $a < -9$ osv. $\square$

Att det överhuvudtaget finns en undre begränsning av $f(x)$ i exemplet ovan är man garanterad i detta fall pga att högstagradskoefficienten är positiv ($a_n = +1$) och polynomgraden är jämn ($n = 6$).

Allmänt gäller för $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ med $D_f = \mathbb{R}$ och $n \geq 2$ att

	n jämn		n udda	
	$a_n < 0$	$a_n > 0$	$a_n < 0$	$a_n > 0$
x avtar mot $-\infty$	$f(x)$ avtar mot $-\infty$	$f(x)$ växer mot $+\infty$	$f(x)$ växer mot $+\infty$	$f(x)$ avtar mot $-\infty$
x växer mot $+\infty$	$f(x)$ avtar mot $-\infty$	$f(x)$ växer mot $+\infty$	$f(x)$ avtar mot $-\infty$	$f(x)$ växer mot $+\infty$
	$f(x)$ har ett max.värde	$f(x)$ har ett min.värde		

(Polynomdivision och Faktorsatsen kan vi redan men repetera gärna.)

Sats 5 (Geometrisk summa)

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad \text{för alla } x \neq 1$$

Ett festligt bevis av detta fås genom att låta
$S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$
Då är $1 + xS_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1}$
och $1 + xS_n - S_n = 1 - 1 + x - x + \ldots + x^n - x^n + x^{n+1} = x^{n+1}$
(där summan $xS_n - S_n$ kallas teleskopsumma eftersom den kollapsar likt ett teleskop)
varmed $xS_n - S_n = (x-1)S_n = x^{n+1} - 1$ och således $S_n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. $\square$

Man kan även bevisa Sats 5 genom induktion.

Rationella funktioner

Det är funktioner på formen $f(x) = p(x)/q(x)$ där p och q är polynom.

Exempel Lös ekvationen

$$\frac{1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n}{1 - x + x^2 - x^3 + \ldots (-1)^n x^n} = 2$$

för varje positivt udda heltal n.

Lösning Låt oss först och främst betrakta specialfallen $x = 1$ och $x = -1$.
Om $x = 1$ så är nämnaren en teleskopsumma som resulterar i $(1-1) + (1-1) + \ldots + (1-1) = 0$ varmed $x = 1$ ej kan vara en rot. Om $x = -1$ så är täljaren teleskopsumman $(1-1) + (1-1) + \ldots + (1-1) = 0$ varmed inte heller $x = -1$ kan vara en rot. Totalt är därmed $|x| \neq 1$.

Skrivet med summasymboler är ekvationen

$$\sum_{k=0}^{n} x^k \;=\; 2\sum_{k=0}^{n}(-x)^k$$

och genom att utnyttja Sats 5, s. 57 (satsen om geometrisk summa) är detta

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \;=\; 2\,\frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)}$$

där n udda innebär att $n+1$ är jämnt så $(-x)^{n+1} = x^{n+1}$. Dessutom är $|x| \neq 1$ så täljaren $1 - x^{n+1}$ kan strykas ur båda led varmed

$$x+1 \;=\; 2(x-1) \qquad \Rightarrow \qquad 3x \;=\; 1 \qquad \Rightarrow \qquad x \;=\; \frac{1}{3}$$

$\square$

Läs om potens- och exponentiallagarna s. 69−76.

Sats 8
<u>Om</u> $a > 1$ och $\alpha > 0$
<u>så</u> $a^x/x^\alpha \to \infty$ då $x \to \infty$.

Läs beviset!

Exempel Undersök $\dfrac{1+x^{100}10^x}{1+x^{10}11^x}$ för stora värden på x.

Lösning: Då $x \to \infty$ gäller att

$$\begin{aligned}
\frac{1+x^{100}10^x}{1+x^{10}11^x} &= \frac{(\frac{1}{11})^x + x^{100}(\frac{10}{11})^x}{(\frac{1}{11})^x + x^{10}} \\
&= \frac{x^{-10}(\frac{1}{11})^x + x^{90}(\frac{10}{11})^x}{x^{-10}(\frac{1}{11})^x + 1} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \text{Med } a = 11/10 \text{ och } \alpha = 90 \text{ är} \\ x^{90}(\frac{10}{11})^x = x^{90}/(\frac{11}{10})^x = x^\alpha/a^x \to 0 \\ \text{då } x \to \infty \text{ (enl. Sats 8, kapitel 1).} \\ \text{Självklart } x^{-10}(\frac{1}{11})^x \to 0 \text{ eftersom} \\ \text{både } x^{-10} \to 0 \text{ och } (\frac{1}{11})^x \to 0 \text{ då } x \to \infty. \end{array} \right\} \\
&\to \frac{0+0}{0+1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\square$