© 2005 Eric Järpe
Högskolan i Halmstad

Kapitel 3: Induktion och rekursion

Induktionsprincipen

Summan $1+2+3+4+5=15$ kan man skriva $\sum_{k=1}^{5} k$.

Summan av $a_1, a_2, \ldots, a_n$ betecknas $\sum_{k=1}^{n} a_k$.

Sats $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ för $n \in \mathbb{Z}^+$.

Bevis: Satsen kan bevisas på olika sätt. Två är

1. Bra idé
   Låt oss kalla summan $\sum_{k=1}^{n} k$ för S. Då är

$$\begin{array}{rrcccccccccc} & S & = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & (n-1) & + & n \\ + & S & = & n & + & (n-1) & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \\ \hline & 2S & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

   Eftersom det är n termer i summan S är $2S = n(n+1)$ varmed:
   $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2. Induktion
   För $n = 1$ är summan endast den första termen 1 och högerledet
   är då $\frac{1\cdot(1+1)}{2} = 1$ så då stämmer det. Men hur är det för $n = 2, 3, 4, \ldots$?
   Enligt påståendet skall för $n + 1$:
   $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
   Om vi visar detta är vi klara! Summan från 1 till $n + 1$ är densamma
   som summan från 1 till n plus den sista termen, $n + 1$:
   $\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + n + 1$. Om påståendet varit sant för n skulle
   $\sum_{k=1}^{n} k$ kunna bytas mot $\frac{n(n+1)}{2}$ och då skulle vi haft att
   $\sum_{k=1}^{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{1}{2}(n(n+1) + 2(n+1)) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.
   Därmed har vi visat att om satsen är sann för n så är den också sann
   för $n + 1$. Men vi började med att kolla fallet $n = 1$ och eftersom
   det var sant måste det vara sant för $n = 2$. Och eftersom
   det stämmer för $n = 2$ måste det vara sant för $n = 3$ osv.
   Beviset är klart! □

Basfallet i induktionsbeviset är av helt avgörande vikt. Däremot måste man inte ha just $n = 1$ som basfall − det går lika bra med vilket heltal som helst bara det är det *minsta* av de tal för vilka man vill visa den generella formeln!

Exempel

Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ där $n \in \mathbb{Z}^+$.

Lösning:

Basfall ($n = 1$): $\displaystyle\frac{1}{1 \cdot (1+1)} = \frac{1}{2}$ (ok)

Induktionssteg: Antag att $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ och visa att $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n+1}{n+2}
\end{aligned}
$$

Enligt induktionsprincipen har vi därmed visat att $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$. $\square$

(Detta kan även visas genom att observera att $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ dvs $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$ vilket är en "teleskopsumma" (den är $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ där alla termer utom den första, 1, och den sista, $-\frac{1}{n+1}$, tar ut varandra så att hela summan fälls ihop som ett teleskop). Så kvar blir bara $1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.) $\square$

Exempel

Visa att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ där $n \in \mathbb{Z}^+$.

Lösning:

Basfall ($n = 1$): $\displaystyle\frac{1}{1(1+1)(1+2)} = \frac{1}{6}$ och $\displaystyle\frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)} = \frac{1}{6}$ (ok)

Induktionssteg: Antag ok för n och visa för $n+1$ (dvs visa att $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n(n+3)(n+3)+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}
\end{aligned}$$

Eftersom detta ska visas lika med $\frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$ måste det vara möjligt att bryta ut $(n+1)$ ur täljaren så ansätt $(n+1)(an^2+bn+c) = an^3+(a+b)n^2+(b+c)n+c$. För att detta ska vara detsamma som täljaren n^3+6n^2+9n+4 måste

$$\left\{\begin{array}{rcl} a &=& 1 \\ a+b &=& 6 \\ b+c &=& 9 \\ c &=& 4 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 1 \\ b &=& 5 \\ c &=& 4 \end{array}\right.$$

dvs

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{(n+1)(n^2+5n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n^2+5n+4}{4(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{(n+1)n+4n+4}{4(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}
\end{aligned}$$

vilket skulle bevisas. Enligt induktionsprincipen är beviset klart. $\square$

På samma sätt som man skriver $a_1+a_2+\ldots+a_n$ som $\sum_{k=1}^{n} a_k$ skriver man produkten $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$ som $\prod_{k=1}^{n} a_k$.

Obs! Eftersom $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ är $\ln(\prod_{k=1}^{n} a_k) = \sum_{k=1}^{n} \ln a_k$, dvs att visa $\prod_{k=1}^{n} a_k = A$ är ekvivalent ($\Leftrightarrow$) med att visa att $\sum_{k=1}^{n} b_k = B$ där $b_k = \ln a_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ och $B = \ln A$.

Exempel

Visa att $\prod_{k=1}^{n} e^{2k-1} \; = \; e^{n^2}$ för alla $n \in \mathbb{Z}^+$.

Lösning: Lograitmera båda led. Från vänster led fås

$$\begin{aligned} \ln\Big(\prod_{k=1}^{n} e^{2k-1}\Big) \; &= \; \sum_{k=1}^{n} \ln(e^{2k-1}) \\ &= \; \sum_{k=1}^{n} 2k-1 \end{aligned}$$

vilket beräknas till

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) \; = \; 2(\textstyle\sum_{k=1}^{n} k) - n \; = \; 2 \cdot \dfrac{n(n+1)}{2} - n \; = \; n^2 + n - n \; = \; n^2.$$

Detta är precis vad som fås från höger led:

$$\ln(e^{n^2}) \; = \; n^2\,.$$

□

Rekursion

En talföljd kan definieras "direkt":
$a_n = f(n)$, dvs en regel för vad som görs med tal n för att få fram det n:te talet n,
eller **rekursivt**:
$a_n = g(n, a_{n-1})$, dvs en regel för vad som görs med med n och det $(n-1)$:te talet, a_{n-1}, för att fram det n:te, a_n.

T.ex. kan summan av de n första positiva heltalen skrivas "direkt" som

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k$$

men ocks *rekursivt* som

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = n + 1 + a_n \quad \text{då } n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Exempel
Antag att $a_0 = 1$ och att $a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n}$ då $n = 1, 2, 3, \ldots$
Detta är ett exempel på en **rekursiv definition** av talföljden $\{a_n\}$.
Visa att $a_n < 3$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

Lösning:
Basfall: Klart att $a_0 = 1 < 3$.
Ind.ant.: Antag att $a_n < 3$.
Ind.steg: Visa att $a_{n+1} < 3$
$a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n}$.
Eftersom $a_n < 3$ enl. induktionsantagandet är
$\sqrt{3 + a_n} < \sqrt{3+3} < \sqrt{3+6} = 3$
varmed $a_n < 3$ för alla $n \in \mathbb{N}$ enligt induktionsprincipen. □