© 2005 Eric Järpe
Högskolan i Halmstad

Forts. Kapitel 3: Induktion och rekursion

Homogena linjära rekurrensekvationer

Första ordningens av typen $x_{n+1} + ax_n = 0$ och andra ordningens av typen $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$.

Sats 3.1
Antag att $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ har lösningarna λ_1 och λ_2.
Då har rekurrensekvationen $x_{n+2} + px_{n+1} + q = 0$ lösningen

$$x_n = \begin{cases} C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n & \text{om } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ (An+B)\lambda^n & \text{om } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \end{cases}$$

där A, B, C_1 och C_2 är konstanter.

Exempel Lös

a) $$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} + 3x_n = 0 \quad \text{då } n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = 1 \\ x_{n+2} + 3x_{n+1} + 2x_n = 0 \quad \text{då } n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = 1 \\ x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0 \quad \text{då } n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Lösning:

a) $x_{n+1} = -3x_n \;\Rightarrow\; x_n = (-3)^n x_0 = (-3)^n$

b) Karakteristisk ekvation: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}$,
dvs $\lambda_1 = -2$ och $\lambda_2 = -1$ varmed enl. Sats 3.1 $x_n = C_1(-2)^n + C_2(-1)^n$.
Eftersom $x_0 = 1$ och $x_1 = 1$ har vi dessutom att $C_1+C_2 = 1$ och $-2C_1-C_2 = 1$, dvs $C_1 + (-2C_1 - 1) = 1 \;\Rightarrow\; C_1 = -2 \;\Rightarrow\; C_2 = 3$. Alltså är slutligen $x_n = -2(-2)^n + 3(-1)^n = (-2)^{n+1} + 3(-1)^n$.

c) Karakteristisk ekvation: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}$,
dvs $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = 1$ varmed $x_n = C_1 2^n + C_2 1^n$. Eftersom $x_0 = 1$ och $x_1 = 1$ har vi dessutom att $C_1 + C_2 = 1$ och $2C_1 + C_2 = 1$, dvs $C_1 = 0$ och $C_2 = 1$. Alltså är i detta fall $x_n = 1$. □

Inhomogena linjära rekurrensekvationer

Ekvationer av typen $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = h_n$ löses genom att dels bestämma lösningen x_{hn} till motsvarande homogena ekvation och sedan bestämma en partikulärlösning, x_{pn}, till den fullständiga ekvationen. Då är den allmänna lösningen x_n till den fullständiga ekvationen summan av de två: $x_n = x_{hn} + x_{pn}$. Tekniken för att hitta partikulärlösning varierar med olika högerled h_n. Här följer några tips.

- Om högerledet är ett polynom, ansätts partikulärlösningen som ett godtyckligt polynom av samma grad som högerledet (se första exemplet nedan).
- Om högerledet är ett exponentialuttryck ansätts partikulärlösningen som exponentialuttrycket gånger en okänd del z_n. Exponentialuttrycket bryts ut och z_n ansätts som godtyckligt polynom enligt föregående. Därefter fås partikulärlösningen (se andra expemplet nedan).
- Om högerledet är en summa av polynom och exponentialuttryck kan båda fallen behandlas var för sig vilket ger två lösningar. Partikulärlösningen är sedan summan av dessa två lösningar.

Exempel Lös

$$\begin{cases} x_0 &= 1 \\ x_1 &= 1 \\ x_{n+2} + 3x_{n+1} + 2x_n &= 6n^2 + n + 1 \quad \text{då } n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Lösning: Motsvarande homogena ekvation har vi redan löst i det föregående exemplet. Vi hejdar oss dock med att sätta in startvärdena utan nöjer oss med $x_{hn} = C_1(-2)^n + C_2(-1)^n$. Istället koncentrerar vi oss på hur man härleder partikulärlösning då man har ett polynom i högerledet: *ansätt ett godtyckligt polynom av samma grad*. I fallet i detta exemplet är högerledet ett andragradspolynom och således ansätter vi $x_{pn} = an^2 + bn + c$ varmed
$x_{n+1} = a(n+1)^2 + b(n+1) + c = an^2 + 2an + a + bn + b + c = an^2 + (2a+b)n + (a+b+c)$,
$x_{n+2} = a(n+2)^2 + b(n+2) + c = an^2 + 4an + 4a + bn + 2b + c = an^2 + (4a+b)n + (4a+2b+c)$, varmed $x_{n+2} + 3x_{n+1} + 2x_n =$
$= an^2 + (4a+b)n + (4a+2b+c) + 3an^2 + 3(2a+b)n + 3(a+b+c) + 2an^2 + 2bn + 2c =$
$= 6an^2 + (10a+6b)n + (7a+5b+6c) = 6n^2 + n + 1$. För att detta ska stämma för alla värden på n måste $\begin{cases} 6a &= 6 \\ 10a + 6b &= 1 \\ 7a + 5b + 6c &= 1 \end{cases}$. Eftersom vi genast ser att $a = 1$ kan vi reducera detta till $\begin{cases} 6b + c &= -9 \quad (1) \\ 5b + 6c &= -6 \quad (2) \end{cases}$. $(1) \Rightarrow b = -3/2 \overset{(2)}{\Rightarrow}$ $5(-\frac{3}{2}) + 6c = -6 \Rightarrow c = \frac{1}{6}(-6 + \frac{15}{2}) = \frac{1}{4}$. Alltså är $x_{pn} = n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{1}{4}$ och $x_n = x_{hn} + x_{pn} = C_1(-2)^n + C_2(-1)^n + n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{1}{4}$. Nu är det dags för startvärdena att bestämma värdet på konstanterna. Vi har $1 = x_0 = C_1 + C_2 + \frac{1}{4} \Rightarrow C_1 + C_2 = \frac{3}{4}$ and $1 = x_1 = -2C_1 - C_2 + 1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \Rightarrow -2C_1 - C_2 = \frac{5}{4}$. Adderar vi de två ekvationerna fås att $-C_1 = 2$ och att $C_2 = \frac{3}{4} - (-2) = \frac{11}{4}$. Slutligen är alltså den fullständiga lösningen $x_n = (-2)^{n+1} + \frac{11}{4}(-1)^n + n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{1}{4}$. □

<u>**Exempel**</u> Lös

$$\begin{cases} x_0 &= 1 \\ x_1 &= 1 \\ x_{n+2} + 3x_{n+1} + 2x_n &= 2^{n+1}(n+1) + 6n^2 + n + 1 \quad \text{då } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Lösning: Detta högerled är en summa av ett polyom och ett exponentialuttryck. Polynomet behandlades i föregående uppgift så nu tar vi itu med exponentialuttrycket:
Ansätt lösningen $x_{pn} = 2^n z_n$. Då är ekvationen

$$\begin{aligned} x_{n+2} + 3x_{n+1} + 2x_n &= 2^{n+2} z_{n+2} + 3 \cdot 2^{n+1} z_{n+1} + 2 \cdot 2^n z_n \\ &= 2^{n+1}(2z_{n+2} + 3z_{n+1} + z_n) \\ &= 2^{n+1}(n+1) \end{aligned}$$

Eftersom $2^{n+1} > 0$ för alla värden på n kan vi dividera med n i båda led varmed $2z_{n+2} + 3z_{n+1} + z_n = n + 1$. Detta är annat fall av rekurrensekvation med polynom i högerledet varmed vi ansätter $z_n = an + b$ så att $z_{n+1} = an + (a + b)$ och $z_{n+2} = an + (2a + b)$ vilket leder till

$$\begin{aligned} 2z_{n+2} + 3z_{n+1} + z_n &= 2an + 2(2a + b) + 3an + 3(a + b) + an + b \\ &= 6an + (7a + 6b) = n + 1 \\ &\Rightarrow 6a = 1 \text{ och } 7a + 6b = 1 \\ &\Rightarrow a = \frac{1}{6} \text{ och } b = \frac{1}{6}(1 - \frac{7}{6}) = -\frac{1}{36} \\ &\Rightarrow z_n = \frac{1}{6}n - \frac{1}{36} \end{aligned}$$

och $x_{pn} = 2^n z_n + n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{1}{4} = 2^n(\frac{1}{6}n - \frac{1}{36}) + n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{1}{4}$.
Därmed är $x_n = x_{hn} + x_{pn} = C_1(-2)^n + C_2(-1)^n + 2^n(\frac{1}{6}n - \frac{1}{36}) + n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{1}{4}$.
Startvärdena ger:
$1 = x_0 = C_1 + C_2 - \frac{1}{36} + \frac{1}{4} \ \Rightarrow \ C_1 + C_2 = \frac{2}{9}$
$1 = x_1 = -2C_1 - C_2 + 2(\frac{1}{6} - \frac{1}{36}) + 1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \ \Rightarrow \ -2C_1 - C_2 = \frac{5}{6}$
och ledvis addition renderar $-C_1 = \frac{19}{18} \ \Rightarrow \ C_2 = \frac{23}{18}$.
Slutligen är därmed $x_n = -\frac{19}{18}(-2)^n + \frac{23}{18}(-1)^n + 2^n(\frac{1}{6}n - \frac{1}{36}) + n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{1}{4}$. □