Satser och bevis för Distanskurs i Envariabelanalys, 5 p

Man skall kunna formulera och bevisa följande satser:

- **Sats 6** [s. 150–151]
  Följden $(1+\frac{1}{n})^n$ är växande och uppåt begränsad.

- **Sats 14** *Medelvärdessatsen* [s. 202–203]
  <u>Om</u> f kont. på $[a,b]$ och deriverbar på (a,b)
  <u>så</u> finns $\xi \in (a,b) : f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$.

- **Sats 2** [s. 221, se även föreläsn.ant.]
  <u>Om</u> $f'(x_0)=0$ och f kont. på $(x_0-\epsilon\,,\,x_0+\epsilon)$
  <u>så</u> $f''(x)>0,\ x\in(x_0-\epsilon\,,\,x_0+\epsilon) \ \Rightarrow\ x_0$ strängt lokalt min för f
  $f''(x)<0,\ x\in(x_0-\epsilon\,,\,x_0+\epsilon) \ \Rightarrow\ x_0$ strängt lokalt max för f

- **Sats** *L'Hopitals regel* [s. 428]
  <u>Om</u> $f(0)=g(0)=0$ och $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara kring $x=0$
  <u>så</u> $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

- **Sats 3** [s. 288–289]
  Alla kontinuerliga funktioner är integrerbara på slutna intervall.

- **Sats 7** *Integralkalkylens medelvärdessats* [s. 294–295]
  <u>Om</u> f kontinuerlig på $[a,b]$
  <u>så</u> finns $\xi\in[a,b]$ sådant att $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \ = \ f(\xi)(b-a)$

- **Sats 9** *Analysens huvudsats* [s. 296–297, se även föreläsn.ant.]
  <u>Om</u> f kontinuerlig på $[a,b]$
  <u>så</u> är $S(x) \ = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ en primitiv funktion till f (dvs $S'=f$).

- **Sats 10** [s. 298–299]
  <u>Om</u> f kontinuerlig på $[a,b]$
  F primitiv funktion till f
  <u>så</u> är $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \ = \ \Big[F(x)\Big]_a^b \ = \ F(b)-F(a)$

- **Sats 1** [s. 340–341]
  Om f är kont., avtagande, positiv
  så $f(n) + \int_1^n f(x)\,dx \;\leq\; \sum_{k=1}^n f(k) \;\leq\; f(1) + \int_1^n f(x)\,dx$

- **Sats 1** [s. 376]
  Om a och b konstanta map x
  y_h allmän lösning till den homogena ekvationen, $y'' + ay' + by = 0$
  y_p partikulärlösning till $y'' + ay' + by = h(x)$
  så $y = y_p + y_h \;\Leftrightarrow\; y$ allmän lösning av $y'' + ay' + by = h(x)$

- **Följd av Sats 1** [s. 376, 393]
  Om a och b konstanta map x
  y_1 partikulärlösning till $y'' + ay' + by = h_1(x)$
  y_2 partikulärlösning till $y'' + ay' + by = h_2(x)$
  så $y_p = y_1 + y_2$ partikulärlösning till $y'' + ay' + by = h_1(x) + h_2(x)$

- **Sats 2 & 3** [s. 378–381]
  Om $y'' + ay' + by = 0$ där a och $b \neq 0$ konstanta map x
  $r_1,\ r_2$ lösningar till den **karakteristiska ekvationen**: $r^2 + ar + b = 0$
  så fås den allmänna lösningen till ekvationen av att
  1. $r_1 \neq r_2 \;\Rightarrow\; y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$
  2. $r_1 = r_2 = r \;\Rightarrow\; y = Ae^{rx} + Bxe^{rx}$
  3. $r = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \;\Rightarrow\; y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ (specialfall av 1.)