© 2005 Eric Järpe
Högskolan i Halmstad

Kapitel 2: Vektorer

En **skalär** är ett reellt tal.

Begreppet **rum** är mer svårdefinierat i det allmänna fallet. Benämningen *rum* kommer inte av svenskans rum i betydelsen "kammare" utan snarare av tyskans *Raum* med betydelsen "rymd". Beträffande de *rum* vi kommer att syssla med kan man tänka på en mängd av element där elementen är punkter med fixerade positioner. Exempel på (vektor-)rum är: i 1 dimension (tal-)linjen $\mathbb{R}$, i 2 dimensioner planet $\mathbb{R}^2$, i 3 dimensioner rymden $\mathbb{R}^3$ och det n-dimensionella rummet $\mathbb{R}^n$. I kapitel 1–5 sysselsätter vi oss med de geometriska rummen $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$. I kapitel 6 kommer vi in något på $\mathbb{R}^n$.

Två punkter, A och B, i ett rum, S, bestämmer entydigt en sträcka från A till B. Den kallas **riktad sträcka** och betecknas $\overrightarrow{AB}$. Punkten A där sträckan börjar kallas **fot** och punkten B där sträckan slutar kallas **spets**.

Vektorer

Genom att samtidigt flytta fot, A, och spets, B, för den riktade sträckan $\overrightarrow{AB}$ *lika mycket åt samma håll* fås en ny riktad sträcka $\overrightarrow{CD}$. $\overrightarrow{AB}$ är då **parallell** med $\overrightarrow{CD}$ (betecknas $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$) och sättet att flytta en sträcka kallas **parallellförflyttning**. Genom parallellförflyttning av en godtycklig riktad sträcka kan man få oändligt många nya riktade sträckor $\overrightarrow{A_2B_2}$, $\overrightarrow{A_3B_3}$, ...

Mängden av riktade sträckor som kan fås av en viss riktad sträcka kallas **vektor**. Eller snarare är vektorn alla dessa riktade sträckor och alla riktade sträckor i mängden är *representanter* av vektorn. Genom att ange en viss vektor har man därmed angivit riktning och längd men inte fot och spets! **Nollvektorn**, $\mathbf{0}$, i S är den vektor som representeras av den riktade sträckan $\overrightarrow{AA}$ där A är en godtycklig punkt i S.

För varje vektor $\boldsymbol{u}$ är längden $|\boldsymbol{u}|$ entydigt bestämd (eftersom fot och spets för olika representanter skiljer sig endast genom parallellförflyttning).

T.ex. antag att vi i det 2-dimensionella kooridinatsystemet har vektorn
$\boldsymbol{u} = \{$riktade sträckor mellan (x_0, y_0) och (x_0+1, y_0-2) där $x, y \in \mathbb{R}\}$.
Då är längden $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{(x_0+1-x_0)^2 + (y-2-y)^2} = \sqrt{5}$.

(Jämför detta med definitionen av (absolut-)beloppet $|z|$ av ett komplext tal där x-koordinaten är realdelen av z och y-koordinaten är imaginärdelen av z.)

Vektoraddition

Låt $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ vara godtyckliga vektorer i rummet S. Låt $\overrightarrow{A_uB_u}$ vara en riktad sträcka som representerar $\boldsymbol{u}$. Låt nu $\overrightarrow{B_uD_v}$ vara *den* riktade sträcka som representerar $\boldsymbol{v}$ *och* har fot i punkten B_u. Då är den riktade sträckan $\overrightarrow{A_uD_v}$ en representant för vektorn $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$.

$\boxed{\text{Skalärmultiplikation}}$

Om $\lambda \in \mathbb{R}$ och $\boldsymbol{u}$ är vektor i S så är vektorn $\lambda \cdot \boldsymbol{u} \in S$ entydigt bestämd av att

1. $\boldsymbol{u} \parallel \lambda\boldsymbol{u}$
2. $|\lambda\boldsymbol{u}| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{u}|$
3. $\lambda > 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{u}$ och $\lambda\boldsymbol{u}$ likriktade
   $\lambda < 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{u}$ och $\lambda\boldsymbol{u}$ motriktade
   $\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.

Med "vektormultiplikation" kan vi mena olika saker (*skalärprodukt* eller *vektorprodukt*) men dit kommer vi senare (kapitel 4 och 5).

Baser

Lemma 1
Antag att $\boldsymbol{e} \neq \mathbf{0}$ på linjen.
Då gäller att $\forall\, \boldsymbol{u}$ på linjen $\exists!\, x \in \mathbb{R} : \boldsymbol{u} = x\boldsymbol{e}$.

Bevis:

Låt $x = \begin{cases} |\boldsymbol{u}|/|\boldsymbol{e}| & \text{om likriktade} \\ -|\boldsymbol{u}|/|\boldsymbol{e}| & \text{om motriktade} \end{cases}$

(Detta bestämmer entydigt det reella talet x).

Då är $x\boldsymbol{e}$ och $\boldsymbol{u}$ parallella och lika långa:

$$|x\boldsymbol{e}| \;=\; |x| \cdot |\boldsymbol{e}| \;=\; \begin{cases} \frac{|\boldsymbol{u}|}{|\boldsymbol{e}|} \cdot |\boldsymbol{e}| = |\boldsymbol{u}| & \text{om likriktade} \\ \left|-\frac{|\boldsymbol{u}|}{|\boldsymbol{e}|}\right| \cdot |\boldsymbol{e}| = |\boldsymbol{u}| & \text{om motriktade} \end{cases}$$

Detta innebär att
om $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{e}$ likriktade är $\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{e}$.
om $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{e}$ motriktade är antingen

$$1. \begin{cases} \boldsymbol{e} \text{ riktad mot } +\infty \\ \boldsymbol{u} \text{ riktad mot } -\infty \end{cases} \quad \text{eller} \quad 2. \begin{cases} \boldsymbol{e} \text{ riktad mot } -\infty \\ \boldsymbol{u} \text{ riktad mot } +\infty \end{cases}$$

I fall 1. är

$$x\boldsymbol{e} \;=\; -\frac{|\boldsymbol{u}|}{|\boldsymbol{e}|} \cdot \boldsymbol{e} \;=\; \underbrace{-|\boldsymbol{u}|}_{=\boldsymbol{u}} \cdot \underbrace{\frac{\boldsymbol{e}}{|\boldsymbol{e}|}}_{=1} \;=\; \boldsymbol{u}$$

I fall 2. är

$$x\boldsymbol{e} \;=\; -\frac{|\boldsymbol{u}|}{|\boldsymbol{e}|} \cdot \boldsymbol{e} \;=\; \underbrace{|\boldsymbol{u}|}_{=\boldsymbol{u}} \Big(\underbrace{-\frac{\boldsymbol{e}}{|\boldsymbol{e}|}}_{=-(-1)} \Big) \;=\; \boldsymbol{u}$$

$\square$

Sats 2
Om $\boldsymbol{e}_1 \nparallel \boldsymbol{e}_2$ så gäller
$\forall\, \boldsymbol{u}$ i planet $\exists\,!\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} : \boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$.

Läs beviset!

För vidgad förståelse, läs Sats 3 och dess bevis (generalisering av Lemma 1 och Sats 2 till 3 dimensioner).

Läs även definitionerna av **bas** och **koordinat** på s. 31!
Dessa definitioner säger i princip att:
En nollskild vektor är bas för linjen.
Två icke-parallella vektorer är bas för planet.
Tre vektorer som inte ligger i samma plan är bas för det 3-dimensionella rummet.

Lemma 1 och Sats 2 och 3 gör att koordinaterna är entydigt bestämda.

Låt oss nu gå över till att skriva $\mathbb{R}^n$ istället för S där $n = 1, 2$ eller 3.

En vektor $\boldsymbol{u}$ i $\mathbb{R}^n$ betecknas $\boldsymbol{e} = (x_1, \ldots, x_n)$ där $n = 1, 2$ eller 3.

Linjärt beroende och oberoende

Antag att $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p \in \mathbb{R}^n$ där $p \geq 2$. Då kallas $\boldsymbol{w}$ linjärkombination av $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p$ om det finns tal $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sådana att

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \boldsymbol{u}_i \ .$$

Beträffande en bas $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ så är varje vektor $\boldsymbol{u} = (x_1, \ldots, x_n)$ en linjärkombination av basen eftersom $\boldsymbol{e} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \boldsymbol{e}_i$ (se s. 32).

Vektorerna $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p$ kallas **linjärt beroende** om någon av dem är en linjärkombination av de andra. Om de inte är linjärt beroende kallas de **linjärt oberoende**.

Detta kan låta lite kufiskt men den geometriska tolkningen är att i 1 dimension är en vektor $\boldsymbol{u}$ linjärt beroende omm $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, i 2 dimensioner är $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ linjärt beroende omm $\boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v}$, i 3 dimensioner är $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ linjärt beroende omm de ligger i samma plan. Det var just motsatsen till dessa villkor (dvs linjärt *oberoende*) som var förutsättningar i Lemma 1, Sats 2 och 3.

(Se även Sats 4 och dess bevis.)

Sats 5
(i) $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p$ linjärt beroende $\Leftrightarrow\ \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_p : \lambda_j \neq 0$ något j och $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{0}$
(ii) $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p$ linjärt oberoende $\Leftrightarrow\ \{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{0} \Rightarrow \lambda_j = 0$ varje $j\}$

Obs! *(ii)* är det kontrapositiva påståendet av *(i)* och vice versa.

Exempel
Är $\boldsymbol{u}_1 = (4,5,1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (-2,1,1)$, $\boldsymbol{u}_3 = (-1,4,2)$ en bas för $\mathbb{R}^3$?

Denna uppgift handlar om att lösa ett linjärt ekvationssystem. Om det bara finns en lösning och den är $(0,0,0)$ så ger Sats 5 (ii) att vektorerna *är* en bas. Om det finns en lösning sådan att någon av koordinaterna är skild från noll så ger Sats 5 (i) att vektorerna *inte* är en bas.

Vi ska försöka lösa ekvationen

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

dvs lösa systemet

$$\begin{cases} 4\lambda_1 & -2\lambda_2 & -\lambda_3 & = & 0 \\ 5\lambda_1 & +\lambda_2 & +4\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & +\lambda_2 & +2\lambda_3 & = & 0 \end{cases}$$

och via Gausselimination fås

$$\begin{cases} 4\lambda_1 & -2\lambda_2 & -\lambda_3 & = & 0 \\ 21\lambda_1 & -7\lambda_2 & & = & 0 \\ 9\lambda_1 & -3\lambda_2 & & = & 0 \end{cases}$$

och

$$\begin{cases} 4\lambda_1 & -2\lambda_2 & -\lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & -\lambda_2 & & = & 0 \\ 3\lambda_1 & -\lambda_2 & & = & 0 \end{cases}$$

så t.ex. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -2$ är en lösning som ger att

$$1 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-6+2 \\ 5+3-8 \\ 1+3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

och eftersom åtminstone 1 av talen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ är nollskilda så kan $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ ej vara bas för $\mathbb{R}^3$. □

(Se även Exempel 10 i boken s. 36–37.)

Basbyte

I 1 dimension innebär basbyte endast en skalförändring.
I 2 och 3 dimensioner handlar det återigen om att lösa linjära ekvationssystem.
I 3 dimensioner blir den allmänna lösningen som följer:
Antag att koordinatera för vektorn $\boldsymbol{u}$ i basen $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ är (x_1, x_2, x_3).
Koordinaterna (x'_1, x'_2, x'_3) för $\boldsymbol{u}$ i basen $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ där

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{12}\boldsymbol{e}_2 + a_{13}\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_2 = a_{21}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + a_{23}\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_3 = a_{31}\boldsymbol{e}_1 + a_{32}\boldsymbol{e}_2 + a_{33}\boldsymbol{e}_3 \end{cases}$$

fås då genom att lösa ekvationssystemet $\begin{cases} a_{11}x'_1 & +a_{21}x'_2 & +a_{31}x'_3 & = & x_1 \\ a_{12}x'_1 & +a_{22}x'_2 & +a_{32}x'_3 & = & x_2 \\ a_{13}x'_1 & +a_{23}x'_2 & +a_{33}x'_3 & = & x_3 \end{cases}$

m.a.p. x'_1, x'_2 och x'_3. I 2 dimensioner är härledningen liknande.

Läs exemplen 11 och 12 på s. 38–39 samt anmärkningen överst på s. 40.