Högskolan i Halmstad

Kapitel 1: Linjära ekvationssystem

En **linjär ekvation** med n obekanta definieras som en ekvation som kan skrivas på formen $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c$ där $a_1, a_2, \ldots, a_n$ är givna reella tal. Om $n \geq 2$ så har ekvationen i allmänhet oändligt många lösningar.

Flera ekvationer som ska gälla samtidigt sätts samman till **ekvationssystem**. På så vis kan det vara endast en (eller ingen) lösning som satisfieras av (dvs gäller för) samtliga ekvationer i ekvationssystemet.

Ett par tillämpningar av linjära ekvationssystem ges i Exempel 2, 3, s. 2, 3. Naturligtvis kan listan över tillämpningar göras mycket längre. En annan tillämpning är att bistå lösningar av andra problem. T.ex. partialbråksuppdelning (som vi såg i Algebrakursen) där man som del av lösningen av problemet, även löser linjärt ekvationssystem m.a.p. koefficienterna i täljaren till det bråk man ska partialbråks uppdela.

Gausselimination

Att ge en allmän definition av Gausselimination är visserligen fullt möjligt men knappast instruerande för det blir väldigt rörigt. Målet är att genom att multiplicera båda led i ekvationer i systemet och addera ekvationer med varandra, i sista ekvationen lösa ut den *sista* obekanta, x_n, i den näst sista ekvationen lösa ut (sånär som på x_n) den *näst sista* obekanta, x_{n-1}, osv. Läs noggrannt Exempel 4, s. 6, 7 för en illustrativ förklaring av Gausselimination.

Pivotelement är den främsta nollskiljda koefficienten i en ekvation, t.ex. i:
$0x + 2y + 6z + 0w - 8v = 4$ är 2 pivotelement (koeff. framför y)
och i en annan ekvation med obekanta x, y, z, w, v: $-\frac{1}{2}z + w = \frac{8}{3}$ är $-\frac{1}{2}$ pivotelement (koeff. framför z).

Vid Gausselimination strävar man mot att få pivotelement längs ”koefficient-diagonalen” i vänsterleden. Dvs ett system

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & c_n \end{array}\right.$$

transformeras genom radvisa multiplikationer och additioner till

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n & = & c'_2 \\ & \vdots & \\ a''^{\cdots\prime}_{nn}x_n & = & c''^{\cdots\prime}_n \end{array}\right.$$

med pivotelement $a_{11}, a'_{22}, \ldots, a''^{\cdots\prime}_{nn}$.

Sats 1 Vid lösning av linjära ekvationssystem får man
1. Byta ordning på ekvationerna.
2. Byta ordning på de obekanta (se slutet på Exempel 5, s. 9).
3. Multiplicera en ekvation med ett positivt eller negativt tal.
4. Addera två ekvationer ledvis.

(Egenskap 3 och 4 ger att man får addera och subtrahera multipler av ekvationer med ekvationer.)

Lösningsmängd

Lösningsmängden till ett linjärt ekvationssystem är alltid ett av de tre fallen
1: $\emptyset$, 2: $\{1 \text{ lösning}\}$ eller 3: $\{\infty \text{ lösningar}\}$.

Exempel 6, s. 9–11 är ett exempel på fall 3. Exempel 7, s. 11 är ett exempel på fall 1. Exempel 8, s. 12, 13 är ännu ett exempel på fall 3. Exempel 1, 2 och 3, s. 4–9 är exempel på fall 2.

Ett ekvationssystem som innehåller *färre* ekvationer än antalet obekanta kallas **underbestämt**. Exempel på ett underbestämt system är $\begin{cases} x+y+z &= 2 \\ x+y-z &= 3 \end{cases}$. Ett ekvationssystem som innehåller *fler* ekvationer än antalet obekanta kallas **överbestämt**. T.ex. är systemet $\begin{cases} x+y &= 1 \\ x-y &= 3 \\ 2x+y &= 2 \end{cases}$ överbestämt.

Obs! Att ekvationssystemet är under eller överbestämt innebär *inte* att man vet något om det är av fall 1, 2 eller 3!