Högskolan i Halmstad

Kapitel 4: Skalärprodukt

En *skalärprodukt* är inte en produkt mellan två skalärer utan en produkt av två vektorer som *resulterar* i en skalär.

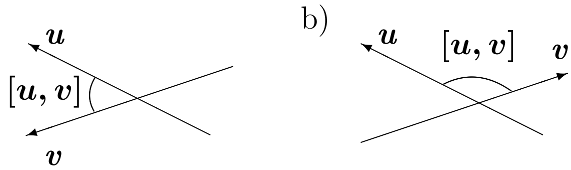
Skalärprodukten mellan $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ definieras

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \begin{cases} |\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|\cdot\cos([\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]) & \text{om } \boldsymbol{u}\neq\mathbf{0} \text{ och } \boldsymbol{v}\neq\mathbf{0} \\ 0 & \text{om } \boldsymbol{u}=\mathbf{0} \text{ eller } \boldsymbol{v}=\mathbf{0} \end{cases}$$

där $[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]$ är den minsta vinkeln mellan vektorerna $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ i vektorernas riktning (se figur nedan).

Exempel

a) b)



a) vinkeln spetsig ⇒ $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ positiv b) vinkeln trubbig ⇒ $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ negativ □

Om $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0$ så kallas $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ ortogonala (vinkelräta), vilket betecknas $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}$.

Obs! För definition av den **ortogonala projektionen av $\boldsymbol{u}$ på $\boldsymbol{v}$**, se boken.

Exempel (Soluret)
Den ortogonala projektionen kan liknas vid skuggan på marken då solen stå i zenit (mitt på himmelen). T.ex. kan man tänka på ett solur mitt på dagen. Längden av skuggan på den liggande solurstavlan är då längden av projektionen av solurets snett uppåtpekande arm. □

Projektionsformeln
Om $\boldsymbol{v}\neq\mathbf{0}$
så är den ortogonala projektionen, av $\boldsymbol{u}$ på $\boldsymbol{v}$, skalären $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|^2$ multiplicerat med $\boldsymbol{v}$.

Läs beviset!

Exempel (Soluret forts.)
Längden av "visaren" i soluret, dvs skuggan av den snett uppåtpekande armen, blir därmed

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{u}'| &= \left|\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2}\cdot\boldsymbol{v}\right| \\ &= \frac{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|\cos([\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}])}{|\boldsymbol{v}|\cdot|\boldsymbol{v}|}\cdot|\boldsymbol{v}| \\ &= |\boldsymbol{u}|\cos([\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]) \end{aligned}$$

dvs $\cos([\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}])$ andelar av den uppåtpekande armens längd. Observera att detta är oberoende av längden av den vektor, $\boldsymbol{v}$, som ligger i solurstavlan plan! □

Lär räknelagarna för skalärprodukt (Sats 2) och läs Exempel 3, 4 och 5.

ON-bas (ortonormerad bas)

$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ utgör en **ON-bas** i $\mathbb{R}^3$ om $|\boldsymbol{e}_i| = 1$ för $i = 1, 2, 3$ och $\boldsymbol{e}_i \perp \boldsymbol{e}_j$ då $i \neq j$.

Sats 3

Om $\boldsymbol{u} = (x_u, y_u, z_u)$ och $\boldsymbol{v} = (x_v, y_v, z_v)$ m.a.p. en ON-bas
så $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$
$|\boldsymbol{u}|^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$

Exempel
Antag att $\boldsymbol{u} = (1, 2, 3)$ och $\boldsymbol{v} = (3, 2, -1)$ med avseede på en ON-bas.
Vad blir projektionen av $\boldsymbol{u}$ på $\boldsymbol{v}$?

Lösning
Projektionen är $\boldsymbol{u}' = \dfrac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}|^2}\boldsymbol{v}$.
Enligt Sats 3 är $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 4$
och $|\boldsymbol{u}|^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$ så

$$\boldsymbol{u}' \;=\; \frac{4}{14}\boldsymbol{v} \;=\; \tfrac{2}{7}(3, 2, -1) \;=\; (\tfrac{6}{7}, \tfrac{4}{7}, -\tfrac{2}{7})$$

$\square$

Läs även Exempel 6 och 7, s. 70–71.

Exempel
Är $\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ en ON-bas m.a.p. basen $(0, -1), (1, 0)$?

Lösning
Vi vill veta om $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$ är en ON-bas men för att besvara den frågan tar vi först reda på om $(0, -1), (1, 0)$ är en ON-bas.

Låt $\boldsymbol{r} = (0, -1)$ och $\boldsymbol{s} = (1, 0)$. Då är $|\boldsymbol{r}| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$ och $|\boldsymbol{s}| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$ och $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}] = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos([\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}]) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{s}$.
Alltså är $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}$ en ON-bas.

Nu till $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$:
$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{\frac{1}{2}(1^2 + 1^2)} = 1$, $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\frac{1}{2}(1^2 + (-1)^2)} = 1$, och enligt Sats 3 är $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$.
Alltså är även $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ en ON-bas. $\square$

Läs Sats 4.

Exempel
Visa att om $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ är en ON-bas och

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) \\ \boldsymbol{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3) \\ \boldsymbol{e}_3' = \frac{1}{\sqrt{6}}(\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) \end{cases}$$

så är $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'$ en ON-bas.

Lösning
Enligt Sats 3 är
$|\boldsymbol{e}_1'|^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 \qquad |\boldsymbol{e}_2'|^2 = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1 \qquad |\boldsymbol{e}_3'|^2 = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = 1$
så basen är normerad.

Vidare är enl. Sats 3:
$\boldsymbol{e}_1' \cdot \boldsymbol{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}) + 0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$
$\boldsymbol{e}_1' \cdot \boldsymbol{e}_3' = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = 0$
$\boldsymbol{e}_2' \cdot \boldsymbol{e}_3' = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}) + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = 0$
så basen är ortogonal. Alltså är den ortonormerad dvs en ON-bas. $\square$

Obs! Pythagoras sats är ett specialfall av avståndsformeln mellan 2 punkter: antag punkten z har x-koordinat x och y-koordinat y (i en ON-bas). Då är avståndet från origo till z: $\underbrace{|\overrightarrow{0z}|}_{\sqrt{(z-0)^2}} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$ dvs $x^2 + y^2 = z^2$ vilket är Pyth. sats.

Pythagoras sats i 3 dimensioner blir därför $|\overrightarrow{0w}| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2}$ dvs $x^2 + y^2 + z^2 = w^2$.

Läs i boken

- **Cirkelns och sfärens ekvationer** i termer av radien och koordinater för centrum.
- **Vinkelbestämning**
- **Normalriktning**
  Normalen, $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0}$, för ett plan är den (3-dim.) vektor som är ortogonal mot varje vektor i planet (se figur överst s. 75).
  Normalen, $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0}$, för en linje är en (3-dim.) vektor som är ortogonal mot linjen.

  Sats 5
  I planet gäller att
  $\ell : ax + by + c = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{n} = (a, b)$
  I det (3-dim.) rummet gäller att
  $\pi : ax + by + cz + d = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{n} = (a, b, c)$

  … och vinkelbestämning mellan plan m.h.a. Sats 5.
- **Komposantuppdelning**
- **Projektion (& Spegling)**
- **Avstånd mellan punkt och punktmängd:** I boken ges exempel och formler för avstånd mellan en punkt och en linje resp. ett plan.

<u>Överkurs</u>

Om man tjuvar lite på det som kommer i ett senare kursmoment kan vi även beräkna (minsta) avstånd mellan 2 linjer (se följande exempel)! I ett senare avsnitt kommer vi dock lära oss ett annat sätt att lösa denna uppgift.

Exempel Låt

$$\ell_1 : \begin{cases} x = 2 + 3s \\ y = -1 + 2s \\ z = 1 + 3s \end{cases} \qquad \ell_2 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = -3t \end{cases}$$

Vad blir (minsta) avståndet mellan linjerna ℓ_1 och ℓ_2?

Lösning

Alla punkter, P, på linjen ℓ_1 har koordinaterna $(2 + 3s, -1 + 2s, 1 + 3s)$ och vi kan få fram olika punkter genom att sätta in olika värden på s. På samma sätt har punkterna, Q, på ℓ_2 koordinaterna $(1 - t, 2 - t, -3t)$. Därmed kan avståndet mellan en punkt på ℓ_1 och en punkt på ℓ_2 skrivas

$$\begin{aligned} |PQ| &= |(2 + 3s, -1 + 2s, 1 + 3s) - (1 - t, 2 - t, -3t)| \\ &= \sqrt{(1 + 3s + t)^2 + (-3 + 2s + t)^2 + (1 + 3s + 3t)^2} \end{aligned}$$

och kvadrerar vi detta och utvecklar kvadraderna under rottecknet fås efter en renskrivning $|PQ|^2 = 11 + 22s^2 + 11t^2 + 2t + 28st$. Idén är nu att bilda 2 uttryck, A och B, och sedan lösa ett linjärt ekvationssystem som slutligen ger oss lösningen.

A: För att konstruera A, gör följande steg:

1. Stryk konstanttermen och termen med bara t och termen med t^2 ur $|PQ|^2$
   $\cancel{11} + 22s^2 + \cancel{11t^2} + \cancel{2t} + 28st$
2. Ta bort ett s ur vardera termen
   $22\cancel{s} \cdot s + 28\cancel{s} \cdot t$
3. Multiplicera koefficienten framför s med 2 så fås
   $A = 44s + 28t$

B: För att konstruera B gör vi på precis samma sätt mot s som vi gjorde mot t ovan och mot t som vi gjorde mot s ovan.
Så genom att byta s mot t och t mot s får vi att stegen är:

1. Stryk konstanttermen och termen med bara s och termen med s^2 ur $|PQ|^2$
   $\cancel{11} + \cancel{22s^2} + 11t^2 + 2t + 28st$ (det finns ingen term med bara s)
2. Ta bort ett t ur respektive term
   $11\cancel{t} \cdot t + 2\cancel{t} + 28\, s \cdot \cancel{t}$
3. Multiplicera koefficienten framför t med 2 så fås
   $B = 22t + 2 + 28s$

Nu ska vi sätta $A = B = 0$ och och lösa detta linjära ekvationssystem.

$$\begin{cases} 44s + 28t = 0 \\ 28s + 22t + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11s + 7t = 0 \\ 14s + 11t = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 121s + 77t = 0 \\ 98s + 77t = -7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 11s + 7t = 0 \\ 23s = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 7/23 \\ t = -11/23 \end{cases}$$

Koordinaterna för de punkter där linjerna är närmast varandra är då
$\ell_1 : (2 + 3 \cdot \frac{7}{23}, -1 + 2 \cdot \frac{7}{23}, 1 + 3 \cdot \frac{7}{23} = (\frac{67}{23}, -\frac{9}{23}, \frac{44}{23})$
$\ell_2 : (1 + \frac{11}{23}, 2 + \frac{11}{23}, 3 \cdot \frac{11}{23}) = (\frac{34}{23}, \frac{57}{23}, \frac{33}{23})$.
Slutligen är avståndet mellan dessa punkter

$$|\ell_1 \ell_2| = \frac{1}{23}\sqrt{33^2 + (-66)^2 + 11^2} = \boxed{\frac{\sqrt{5566}}{23}} \quad (\approx 3.24).$$

$\square$