Högskolan i Halmstad

Kapitel 3: Linjer och plan

Koordinater i (det 3-dimensionella) rummet

Lär **ortsvektor**, **koordinater**, **koordinatsystem**,
x-, y- och z-**axel**, xy-, xz- och yz-**plan**.

En utsaga som entydigt bestämmer en punktmängd kallas **punktmängdens ekvation** (se Exempel 1).

Exempel
Bestäm tredje hörnet i den triangel som har två av hörnen i $(1,1,1)$ och $(1,2,3)$ och vars tyngdpunkt är $(3,3,3)$.

Lösning
Enl. "tyngdpunktsformeln" (s. 26) är
$\frac{1}{3}((1,1,1)+(1,2,3)+(a,b,c))=(3,3,3)$ varmed

$$\begin{aligned}(a,b,c) &= 3\cdot(3,3,3)-(1,1,1)-(1,2,3)\\ &= (9,9,9)-(2,3,4)\\ &= (7,6,5)\end{aligned}$$

□

Koordinater för punkter i planet är ett specialfall av motsvarande för (det 3-dimensionella) rummet då man reducerar bort z-axeln och nöjer sig med $x-$ och y-axel (se s.46–47).

Linjens ekvation

En linje, ℓ, bestäms entydigt av en punkt, P, och antingen ännu en punkt, $Q \neq P$, eller en vektor $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ (se Exempel 5).

Exempel
Undersök om linjerna

$$\ell_1 : \begin{cases} x = 3-2t \\ y = 1+2t \\ z = -1-t \end{cases} \qquad \ell_2 : \begin{cases} x = 3-t \\ y = -1+2t \\ z = 2-2t \end{cases}$$

skär varandra och isåfall var.

Lösning
Vi byter t mot s i den första ekvationen och får då att

$$\begin{cases} 3-2s = 3-t \\ 1+2s = -1+2t \\ -1-s = 2-2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t-2s = 0 & (1) \\ t-s = 1 & (2) \\ 2t-s = 3 & (3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t-s = 1 & (2) \\ -s+2s = 1-0 & (2)-(1) \\ 2t-t = 3-1 & (3)-(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t-s=1 \\ s=1 \\ t=2 \end{cases}$$

vilket har lösningen $(s,t)=(1,2)$, dvs ℓ_1 och ℓ_2 skär varandra i $(1,3,-2)$. □

Antag nu att en linje, ℓ, går genom punkten (x_0, y_0) med riktningen $\boldsymbol{v} = (\alpha, \beta) \neq \mathbf{0}$.

<u>Parameterform</u>
Då kan linjens ekvation skrivas på parameterform
$$\ell : \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$$
där $t \in \mathbb{R}$ (se Exempel 7).

<u>Affin form</u>
Linjens ekvation kan även skrivas $\ell : ax + by + c = 0$
där $a = \frac{1}{\alpha}$, $b = -\frac{1}{\beta}$, $c = -\frac{x_0}{\alpha} + \frac{y_0}{\beta}$

<u>Exempel</u>
Bestäm riktningen för linjen $5e^{2x+y} = 1$.

Lösning
Logaritmering ger att $\ln 5 + 2x + y = 0$ vilket är affin form. Eftersom riktningsvektorn (α, β) fås av den inverterade koefficienten framför x respektive den negativa inverterade koefficienten framför y, så är
$\alpha = 1/2$ och $\beta = -1$ varmed $\boldsymbol{v} = (\frac{1}{2}, -1)$
(eller $(1, -2)$ om man så vill). $\square$

<u>Planets ekvation</u>

Villkoren för punkter och/eller vektorer som entydigt betämmer plan blir lite mer komplicerat än motsvarande villkor för linjer. Ett villkor som entydigt bestämmer är följande.

[Ett plan bestäms entydigt av 2 linjärt oberoende vektorer.

Emellertid kan planet bestämmas av 3 punkter alternativt 2 punkter och en vektor med speciella villkor, men dessa fall är ekvivalenta med villkoret "2 lijärt oberoende vektorer".

Låt $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ vara linjärt oberoende. Då kan varje annan vektor, $\boldsymbol{w}$, i det plan, π, som **spänns** av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ skrivas om en linjärkombination av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$: $\boldsymbol{w} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}$.

Antag att punkten (x_0, y_0, z_0) ligger i planet π och att vektorerna $\boldsymbol{u} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ och $\boldsymbol{v} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ är parallella med π. Då är planets form på

<u>Parameterform</u>
$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 t \\ y = y_0 + \beta_1 s + \beta_2 t \\ z = z_0 + \gamma_1 s + \gamma_2 t \end{cases} \qquad \text{där } s, t \in \mathbb{R}$$

<u>Affin form</u>
$\pi : ax + by + cz + d = 0$ där ej alla $a, b, c = 0$
(Det är inte instruktivt att se den allmänna formen för a, b, c, d i termer av $x_0, y_0, z_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$. Se istället Exempel 10 s. 54–55 för illustration av övergång från parameterform till affin form.)

Exempel

Tre plan π_1, π_2 och π_3 är givna av

$\pi_1 : x - 2y + z - 5 = 0$
$\pi_2 : x + 3z + 1 = 0$
$\pi_3 : 3x + y + z = 0$

Planen π_1 och π_2 skär varandra i en linje ℓ.
Bestäm den punkt, P, där ℓ skär π_3.

Lösning

Denna uppgift kan lösas genom att först ta reda på linjen ℓ:s ekvation (a la Exempel 13) och därefter skärningspunkten, P, mellan ℓ och π_3 (a la Exempel 12).

Emellertid inses efter lite tänkande att om inte något av planen är parallellt med ett annat så måste punkten P vara entydigt bestämd av att *där skär π_1, π_2 och π_3 varandra*. Därmed fås punkten P genom att lösa ekvationssstemet:

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & -2y & +z & = & 5 \\ x & & +3z & = & -1 \\ 3x & +y & +z & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} x & -2y & +z & = & 5 \\ x & & +3z & = & -1 \\ 7x & & +3z & = & 5 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} x & -2y & +z & = & 5 \\ x & & +3z & = & -1 \\ 6x & & & = & 6 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} 1 & -2y & +z & = & 5 \\ 1 & & +3z & = & -1 \\ x & & & = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & -7/3 \\ z & = & -2/3 \end{array}\right. \quad \text{varmed } P = \tfrac{1}{3}(3, -7, 2). \qquad \square$$

Detta exempel är en illustration av fall (ii) på s. 59. Mer allmännt gäller

> **Sats 3**
> Lösningen till ett linjärt ekvationssystem, med 3 obekanta och minst 3 ekvationer, är antingen
> (i) saknad, eller
> (ii) entydig, eller
> (iii) beroende av 1 parameter, eller
> (iv) beroende av 2 parametrar.

Beträffande parallella plan gäller

> **Sats 4**
> $\pi_1 \parallel \pi_2$ omm dess ekvationer är ekvivalenta sånär som på konstanttermen.

Läs Exempel 16 om **gitter**.

Exempel

Är planen $\pi_1 : 2x - 6y + 8z + 1 = 0$ och $\pi_2 : -x + 3y - 4z + 1 = 0$ parallella?

Lösning

Ja, eftersom $(-2) \cdot \pi_2 = \pi_1$ sånär som på konstanttermen så är π_1 och π_2 parallella enligt Sats 4. $\square$

Exempel

Antag att

$$\pi_1 : \begin{cases} x = 1 - 2s + t \\ y = 2s + t \\ z = 4 - s - t \end{cases}$$

Bestäm det plan π_2 som är parallellt med π_1 och går genom punkten $(-1, 2, -3)$.

Lösning

Låt oss först skriva om π_1 på affin form:

$$\begin{cases} x - 1 = -2s + t & (1) \\ y = 2s + t & (2) \\ z - 4 = -s - t & (3) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 4 - z = s + t & (1') = -(3) \\ y = 2s + t & (2') = (2) \\ x + y - 1 = 2t & (3') = (1) + (2) \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 4 - z = s + t & (1'') = (1') \\ 8 - y - 2z = t & (2'') = (1') - 2 \cdot (2') \\ x + y - 1 = 2t & (3'') = (3') \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x + y - 1 = 2(8 - y - 2z) \quad \Rightarrow \quad x + 3y + 4z - 7 = 0.$$

Sätter vi nu in koordinaterna för punkten så fås
$-1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) = -7$.
Därmed måste konstanten vara $+7$ för att (det med π_1 parallella) planet
$\pi_2 : x + 3y + 4z + 7 = 0$ ska gå genom punkten $(-1, 2, -3)$. $\square$