Integraler av typen $\int \frac{dx}{x^2 + bx + c}$

Fall 1: $\boxed{4c < b^2}$ $\{$Partialbråksuppdeln. + subst.$\}$

$$\int \frac{dx}{x^2 + bx + c} = \frac{1}{r_1 - r_2} \ln \left| \frac{x - r_1}{x - r_2} \right| + C$$

där r_1 och r_2 är lösningar till ekvationen $x^2 + bx + c = 0$.

Fall 2: $\boxed{4c > b^2}$ $\{$kvadratkompl. + subst.$\}$

$$\int \frac{dx}{x^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{4c - b^2}} \arctan \left(\frac{2x + b}{\sqrt{4c - b^2}} \right) + C$$

Fall 3: $\boxed{4c = b^2}$ $\{$subst.$\}$

$$\int \frac{dx}{x^2 + bx + c} = -\frac{2}{2x + b} + C$$

Varför blir det 3 fall?

Kvadratkomplettering av nämnaren ger

$$n(x) \;=\; x^2 + bx + c \;=\; \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right)$$

Om nu $\boxed{4c < b^2}$ (dvs $c - b^2/4 < 0$) så har ekvationen $n(x) = 0$ två rella rötter, r_1 och r_2, så att nämnaren kan faktoriseras

$$n(x) \;=\; (x - r_1)(x - r_2)$$

varmed partialbråksuppdelning kan tillämpas.

Om istället $\boxed{4c > b^2}$ (dvs $c - b^2/4 > 0$) är ingen partialbråksupdelning möjlig. Detta inses genom att

$$n(x) \;=\; \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right)$$

där den första termen $(x + \frac{b}{2})^2 \geq 0$ och eftersom $4c < b^2$ är den andra termen $c - \frac{b^2}{4} > 0$ så $n(x) > 0$ varmed ekvationen $n(x) = 0$ ej är (reellt) lösbar.

Emellertid kan integralen då skrivas

$$\int \frac{dx}{x^2 + bx + c} \;=\; \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right)}$$

som kan substitueras till $\int \frac{dt}{t^2+1}$ som kan integreras.

Slutligen, om $\boxed{4c = b^2}$ (dvs $c - b^2/4 = 0$) har ekvationen $n(x) = 0$ dubbelroten r sådan att $n(x) = (x - r)^2$ varmed

$$\int \frac{dx}{x^2 + bx + c} \;=\; \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2}$$

som subsituteras till $\int \frac{dt}{t^2}$ som lätt integreras.

Fall 1: $4c < b^2$

Lös ekvationen $n(x) = x^2 + bx + c = 0$. Det ger rötterna

$$\begin{cases} r_1 &= -\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} \\ r_2 &= -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} \end{cases}$$

vilket innebär att nämnaren $n(x)$ kan skrivas

$$n(x) \;=\; (x - r_1)(x - r_2)$$

Partialbråksuppdelning ger att

$$\frac{1}{(x - r_1)(x - r_2)} \;=\; \frac{1/(r_1 - r_2)}{x - r_1} - \frac{1/(r_1 - r_2)}{x - r_2}$$

så

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + bx + c} &= \int \frac{dx}{(r_1 - r_2)(x - r_1)} - \int \frac{dx}{(r_1 - r_2)(x - r_2)} \\ &= \frac{1}{r_1 - r_2} \int \frac{dx}{x - r_1} - \frac{1}{r_1 - r_2} \int \frac{dx}{x - r_2} \\ &= \frac{1}{r_1 - r_2} \left(\ln|x - r_1| - \ln|x - r_2| \right) \\ &= \frac{1}{r_1 - r_2} \ln\left| \frac{x - r_1}{x - r_2} \right| \end{aligned}$$

Fall 2: $4c > b^2$

Kvadratkomplettering av nämnaren ger

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2+bx+c} &= \int \frac{dx}{(x+\frac{b}{2})^2 + (c-\frac{b^2}{4})} \\
&\quad \left\{ \begin{array}{ll} t = x + b/2 & \text{Låt också} \\ dt = dx & a^2 = c - b^2/4 > 0 \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{dt}{t^2+a^2} \\
&= \frac{1}{a}\int \frac{1}{a}\cdot\frac{dt}{(\frac{t}{a})^2+1} \\
&\quad \left\{ \begin{array}{l} u = t/a \\ du = \frac{1}{a}\,dt \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{a}\arctan u \\
&= \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{t}{a}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}\arctan\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)
\end{aligned}$$

Fall 3: $4c = b^2$

Ersätt c med $b^2/4$ så är

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2 + bx + c} &= \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2} \\
&\quad \left\{ \begin{array}{l} t = x + \frac{b}{2} \\ dt = dx \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{dt}{t^2} \\
&= -\frac{1}{t} \\
&= -\frac{1}{x + \frac{b}{2}} \\
&= -\frac{2}{2x + b}
\end{aligned}$$