# Om binomialkoefficienter

**Notation:**

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad n \geq 0,\ 0 \leq k \leq n$$

Analet sätt att välj $k$ element bland $n$ möjliga utan hänsyn till ordningen är $\binom{n}{k}$.

**Binomialsatsen** $\quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

### Räkneregler för binomialkoefficienter

1. $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$
2. $\binom{n}{0} = 1,\ \binom{n}{1} = n$
3. $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \quad 1 \leq k \leq n$

**Bevis av reglerna:**

1. Direkt från definitionen.

2. Direkt uträkning (obs: $0! = 1$).

3. Metod I: *Direkt uträkning*

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!(n+1-k)}{k!(n+1-k)!} + \frac{n!k}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{n!(n+1) - n!k + n!k}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

Metod II: *Induktion*

**Basfall:** $n = 0 \;\Rightarrow\; 1 \le k \le 0$ finns inte!

$$n = 1 \;\Rightarrow\; k = 1: \binom{n+1}{k} = \binom{2}{1} = 2$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{1}{1} + \binom{1}{0} = 2 \quad \text{(ok)}$$

**Ind.steg:** Antag att $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1},\ 1 \le k \le n \quad (*)$

Vi ska visa att $\binom{n+2}{k} = \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k-1}, 1 \le k \le n+1$

Vi har att $\binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k-1} \overset{(*)}{=} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} + \binom{n+1}{k-1} =$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{(n+1)!}{(k-1)!(n-k+2)!} =$$

$$= \frac{n!(n-k+1)(n-k+2)}{k!(n-k+2)!} + \frac{n!(n-k+2)k}{k!(n-k+2)!} + \frac{(n+1)!k}{k!(n-k+2)!} =$$

$$= \frac{n!(n^2 - 2nk + k^2 + 3n - 3k + 2) + n!(nk - k^2 + 2k) + n!(nk + k)}{n!(n-k+2)!} =$$

$$= \frac{n!(n^2 + 3n + 2)}{k!(n-k+2)!} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Polynomet } n^2 + 3n + 2 \text{ har nollstället } n = -1 \\ \Rightarrow\; n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2) \end{array} \right\}$$

$$= \frac{n!(n+1)(n+2)}{k!(n-k+2)!} = \frac{(n+2)!}{k!(n+2-k)!} = \binom{n+2}{k}$$

Därmed är satsen bevisad för $n \ge 1$ enl. induktionsprincipen. $\square$

Detta är ett exempel på att induktion inte alltid är att föredra då man ska bevisa något som *kan* bevisas m.h.a. induktion...

Dessa tre räkneregler innebär att man kan skriva upp binomialkoefficienterna m.h.a. “Pascals triangel” enl.

$$
\begin{array}{lccccccccc}
n=0 & & & & & 1 & & & & \\
n=1 & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2 & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\textit{osv.} & & & & & & & & &
\end{array}
$$

**Multiplikationsprincipen**
Om man kan välja ett första element på $n_1$ sätt, ett andra på $n_2$ sätt, ..., ett $k$:te på $n_k$ sätt, så är det totala antalet sätt man kan välja de $k$ elementen: $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$.

**Exempel** Bertil har en godispåse med 5 lakritsbåtar, 7 hallonbåtar och 13 sega gubbar. Han bjuder Anna som tar 8 bitar varav 4 hallonbåtar. På hur många sätt kan hon göra det?

**Lösning:** 4 hallonbåtar bland de 7 möjliga kan fås på $\binom{7}{4} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 35$ sätt.
De övriga $8-4=4$ bitarna som Anna tar kan tas bland de övriga $5+13=20$ bitarna på $\binom{20}{4} = \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 5\cdot 19\cdot 3\cdot 17 = 4\,845$ sätt.
Enligt multiplikationsprincipen kan hon därmed ta de 8 bitarna (varav 4 hallonbåtar) på totalt $35\cdot 4\,845 = 169\,575$ sätt. □

**Exempel** Påståendet *Ni talar bra latin* är ett exempel på ett palindrom, dvs en text som blir detsamma läst framlänges som läst baklänges. Hur många andra palindrom (av ej nödvändigtvis meningfulla ord) kan åstadkommas av denna mening (om man bortser från ordmellanrummen) genom att pussla om de olika bokstäverna?

**Lösning:** Eftersom det bara finns ett B (mittenbokstaven i “NI TALAR BRA LATIN”) kan den ej förekomma någon annanstans. Vidare, då vi har konstruerat den första halvan av meningen (dvs de första 7 bokstäverna) så är resten givet. I den första halvan finns det två A. Om vi hanterar dessa som olika bokstäver kan vi välja bland 7 bokstäver för den första platsen, bland 6 bokstäver för den andra platsen o.s.v. varmed vi kan få $7! = 5040$ olika kombinationer. Emellertid förekommer varje kombination då två gånger eftersom att välja det första A:et till ett ställe och det andra A:et till ett annat ger *samma mening* som att ta det andra A:et till det första stället och det första A:et till det andra stället. Därmed är antalet palindrom som kan bildas $7!/2 = 2520$. □