Lösningar till tentamen i Introduktionskurs i Matematik, 5p

Distanskurs
5 januari, 2008, kl. 9.00–13.00

Maxpoäng: 30p. **Betygsgränser**: 12p: betyg G, 21p: betyg VG. **Hjälpmedel**: Inga.
Kursansvarig: Eric Järpe (035-16 76 53, 0702-822 844).

1. Bevisa att $\forall a, r, q, n \in \mathbb{Z} : (a \equiv r \pmod{q} \;\Rightarrow\; na \equiv nr \pmod{q})$. (3p)

   Lösning: (Se Sats 2.5, s. 19 ur *Diskret Matematik* av Bergström.) □

2. Formulera och bevisa satsen om samband mellan reella polynom och konjugerande nollställen. (3p)

   Lösning: (Se Sats 10, s. 465 ur *Analys i flera variabler* av Persson & Böiers.) □

3. Betrakta utsagan $(P \Rightarrow \neg Q) \Leftrightarrow (Q \Rightarrow P)$.
   (a) Bevisa att utsagan är kontingent. (3p)
   (b) Bilda negationen av utsagan. (3p)

   Lösning:

   (a) Sanningsvärdestabell:

P	Q	$(P$	$\Rightarrow$	$\neg Q)$	$\Leftrightarrow$	$(Q$	$\Rightarrow$	$P)$
S	S	S	F	F	F	S	S	S
S	F	S	S	S	S	F	S	S
F	S	F	S	F	F	S	F	F
F	F	F	S	S	S	F	S	F

   Detta innebär att utsagan antar både värdena F och S varmed den är kontingent.

   (b) Negationen av $A \Leftrightarrow B$ är $A \Leftrightarrow \neg B$ och negationen av $C \Rightarrow D$ är $C \wedge \neg D$.
   Alltså är
   $\neg\Big((P \Rightarrow \neg Q) \Leftrightarrow (Q \Rightarrow P)\Big)$
   $\Leftrightarrow$
   $(P \Rightarrow \neg Q) \Leftrightarrow \neg(Q \Rightarrow P)$
   $\Leftrightarrow$
   $(P \Rightarrow \neg Q) \Leftrightarrow (Q \wedge \neg P)$. □

4. En kvinna ska investera ett belopp B i aktier. Om hon köper enbart av aktien Solidarfett för 153 kr/st får hon 7 kr över, och om hon köper enbart Västerviks Sågblad för 282 kr/st får hon 100 kr över. Hur stort måste beloppet B minst vara? (4p)

Lösning: Om vi antar att kvinnan köper x aktier av Solidarfett är $B = 153x + 7$ om hon köper y aktier av Västerviks Sgblad har vi att $B = 282y + 100$. Subtraheras den första från den andra får vi den diofantiska ekvationen $153x - 282y = -7 + 100 = 93$, dvs efter division med 3: $51x - 94y = 31$. Med Euklides algoritm får vi att

$$\begin{aligned} 94 &= 1 \cdot 51 + 43 \\ 51 &= 1 \cdot 43 + 8 \\ 43 &= 5 \cdot 8 + 3 \\ 8 &= 2 \cdot 3 + 2 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \end{aligned}$$

vilket är den sista icke-försvinnande resten, dvs $\mathrm{SGD}(94, 51) = 1$ varmed en partikulärlösning till hjälpekvationen $51x - 94y = 1$ fås av att gå baklänges i Euklides algoritm: $1 = 3 - 1 \cdot 2 = 3 - 1(8 - 2 \cdot 3) = 3 \cdot 3 - 8 = 3(43 - 5 \cdot 8) - 8 = 3 \cdot 43 - 16 \cdot 8 = 3 \cdot 43 - 16(51 - 43) = 19 \cdot 43 - 16 \cdot 51 = 19(94 - 51) - 16 \cdot 51 = 19 \cdot 94 - 35 \cdot 51$. Alltså är $(x_1, y_1) = (-35, -19)$ en partikulärlösning till hjälpekvationen, så $31(x_1, y_1) = (-1085, -589)$ är partikulärlösning till den riktiga ekvationen och den fullständiga lösningen ges av $\{(94m - 1085, 51m - 589) : m \in \mathbb{Z}\}$. Det minsta beloppet, B, fås därför genom att sätta in lämpliga värden på m:

m	$x = 94m - 1085$	$B = 153x + 7$
11	-51	< 0
12	43	6586

Det minsta belopp som kvinnan skulle kunna ha handlat för är alltså 6586 kr. □

5. Lös fullständigt ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x = 6 \\ \quad\;\; -4x^3 + 6x^2 + 4x = 6 \end{cases}$$ (4p)

Lösning: Vi kan skriva ekvationerna som $2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 6 = 0$ och $2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0$. Vi vill hitta $\mathrm{SGD}(2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 6, 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3)$ och lösa den ekvation som fås av att sätta $\mathrm{SGD} = 0$, ty detta ger de rötter som båda ekvationerna har gemensamma, dvs den fullständiga lösningen till ekvationssystemet. Med polynomdivision har vi att

$$\begin{array}{r|rrrrr} & & & & x & -1 \\ \hline 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 & 2x^4 & -5x^3 & +3x^2 & +4x & -6 \\ & 2x^4 & -3x^3 & -2x^2 & +3x & \\ \hline & & -2x^3 & +5x^2 & +x & -6 \\ & & -2x^3 & +3x^2 & +2x & -3 \\ \hline & & & 2x^2 & -x & -3 \end{array}$$

vilket innebär att $2x^4-5x^3+3x^2+4x-6=(x-1)(2x^3-3x^3-2x+3)+2x^2-x-3$. Detta är första steget i Euklides algoritm för att hitta

$$\mathrm{SGD}(2x^4-5x^3+3x^2+4x-6, 2x^3-3x^2-2x+3).$$

Andra steget fås av polynomdivisionen

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & & & x & -1 \\ \cline{2-5}
\underline{2x^2-x-3} & 2x^3 & -3x^2 & -2x & +3 \\
 & 2x^3 & -x^2 & -3x & \\ \cline{2-4}
 & & -2x^2 & +x & +3 \\
 & & -2x^2 & +x & +3 \\ \cline{3-5}
 & & & & 0
\end{array}$$

Därmed är Euklides algoritm för dessa polynom

$$\begin{array}{rcl}
2x^4-5x^3+3x^2+4x-6 & = & (x-1)(2x^3-3x^3-2x+3)+2x^2-x-3 \\
2x^3-3x^3-2x+3 & = & (x-1)(2x^2-x-3)+0
\end{array}$$

varmed $\mathrm{SGD}(2x^4-5x^3+3x^2+4x-6, 2x^3-3x^2-2x+3)=2x^2-x-3$. Ekvationen $2x^2-x-3=0$ har rötterna $x_1=-1$ och $x_2=\frac{3}{2}$ vilket alltså är den fullständiga lösningen av ekvationssystemet. □

6. Hur många 5-siffriga tal kan man bilda med siffrorna 1, 2 och 3 om de ska innehålla minst en etta, tvåa och trea? (3p)

Lösning: Totalt antal tal med 1, 2, 3 är $3^5=243$. Av dessa innehåller

$3\binom{5}{0}=3$ st	bara en av siffrorna 1, 2 eller 3
$6\binom{5}{1}=30$ st	en av 1, 2 eller 3 fyra gånger och en annan av 1, 2 eller 3 en gång
$6\binom{5}{2}=60$ st	en av 1, 2 eller 3 tre gånger och en annan av 1, 2 eller 3 två gånger.

Alltså är det $243-3-30-60=150$ tal som innehåller alla siffrorna minst en gång. □

7. Antag att $a=a_na_{n-1}\dots a_3a_2a_1$ där a_1 är 1-talssiffran, a_2 är 10-talssiffran, a_3 är 100-talssiffran, ... , a_n är 10^{n-1}-talssiffran. Bevisa att

$$11\,|\,a \quad\Leftrightarrow\quad 11\,|\,a_1-a_2+a_3-\ldots+(-1)^{n-1}a_n \qquad (3p)$$

Lösning: Om vi räknar modulo 11 har vi att $a=\sum_{k=1}^{n}10^{k-1}a_k \equiv$ $\equiv\sum_{k=1}^{n}(10-11)^{k-1}a_k=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n-1}$. □

8. Lös rekurrensekvationen $r_n+2r_{n-1}+r_{n-2}=8n^3$ där $r_0=1$, $r_1=0$. (4p)

Lösning: Kar. ekv.: $x^2+2x+1=0$ med dubbelroten $x=-1$ varmed homogen lösning är $r_{hn}=(An+B)(-1)^n$.

Partikulärlösning: Ansätt $r_n = an^3 + bn^2 + cn + d \Rightarrow r_n + 2r_{n-1} + r_{n-2} = an^3 + bn^2 + cn + d + 2((n-1)^3 + b(n-1)^2 + c(n-1) + d) + (n-2)^3 + b(n-2)^2 + c(n-2) + d = 4an^3 + (b-6a+2b-6a+b)n^2 + (c+6a-4b+2c+12a-4c+c)n + (d-2a+2b-2c+2d-8a-4b-2c+d)$. Eftersom detta ska vara lika med $8n^3$ fås ekvationssystemet

$$\begin{cases} 4a &= 8 \\ -12a + 4b &= 0 \\ 18a - 8b + 4c &= 0 \\ -10a - 2b - 4c + 4d &= 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a &= 2 \\ b &= 6 \\ c &= 3 \\ d &= 11 \end{cases}$$

$\Rightarrow r_{pn} = 2n^3 + 6n^2 + 3n + 11$ och den allmänna lösningen är $r_n = r_{hn} + r_{pn} = (An + B)(-1)^n + 2n^3 + 6n^2 + 3n + 11$. Med begynnelsevillkoren fås slutligen att $1 = r_0 = B + 11 \Rightarrow B = -10$, $0 = r_1 = -(A + B) + 2 + 6 + 3 + 11 \Rightarrow A = 32$. Alltså är den fullständiga lösningen $r_n = (32n - 10)(-1)^n + 2n^3 + 6n^2 + 3n + 11$. $\square$

9. Bestäm alla tal $z, w \in \mathbb{C}$, som satisfierar $\frac{1}{|z|+|w|} < \frac{1}{|z+w|}$. (3p)

Lösning: Enligt triangelolikheten är $|z + w| \leq |z| + |w|$ för alla $z, w \in \mathbb{C}$. Eftersom $\frac{1}{|z|+|w|}$ är odefinierat då $|z| + |w| = 0$, dvs endast då $z = w = 0$ och $\frac{1}{|z+w|}$ är odefinerat endast då $w = -z$ gäller olikheten för alla $(w, z) \in \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 : w \neq -z\}$. $\square$